Übungen zur Vorlesung
“Mathematische Statistik“

Wintersemester 2015/16, Blatt 7

Abgabetermin: 8.12.2015, zu Beginn der Vorlesung
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F_X und S_n die empirische Verteilungsfunktion. Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{n}\big(S_n(x) - F(x)\big) \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mathcal{N}\big(0, F(x)(1-F(x)\big).$$

Konvergieren auch die gemeinsamen Verteilungen von $\sqrt{n}\big(S_n(x) - F(x)\big)$ und $\sqrt{n}\big(S_n(y) - F(y)\big)$ für $x, y \in \mathbb{R}$?

Hinweis: Siehe dazu Kapitel 11 des Wahrscheinlichkeitstheorie-Skriptes.

Aufgabe 26 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass im Normalverteilungsmodell mit unbekanntem Erwartungswert und unbekannter Varianz der Schätzer $\pi_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$ für den Erwartungswert und der Schätzer $s^2_{1,2} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2$ für die Varianz erwartungstreu sind, und bestimmen Sie

$$\mathbb{E}\big[\pi_1(X) \mid \overline{X}, s^2(X)\big] \qquad \text{sowie} \qquad \mathbb{E}\big[s^2_{1,2}(X) \mid \overline{X}, s^2(X)\big].$$

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Statistiken $D_n(X)$, $\overline{X}$ und $s^2(X)$ im Normalverteilungsmodell stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig und nach $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt. Weiter sei D_{n,μ,σ^2} die Testatstik für den Kolmogorov-Smirnov-Test. Ermitteln Sie approximativ für den Fall $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ durch Simulation die Verteilung von $D_{n,\overline{X},s^2(X)}$. Simulieren Sie hier *oft genug* (z.B. 10^4-mal) eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Stichprobe, berechnen Sie $D_{n,\overline{X},s^2(X)}$ und plotten die Verteilungsfunktion der empirischen Verteilung. Vergleichen Sie diese mit der empirischen Verteilungsfunktion von $D_{n,0,1}$. Erklären Sie, warum die Verteilungsfunktion im ersten Fall oberhalb der Verteilungsfunktion im zweiten Fall liegt.