

Übungen zur Vorlesung “Mathematische Statistik“

Wintersemester 2015/16, Blatt 6

Abgabetermin: 2.12.2015, zu Beginn der Vorlesung
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 21

(4 Punkte)

Gegeben sei das Bernoullimodell $\{\mathcal{B}(1, \theta)^{(n)}; \theta \in (0, 1)\}$ mit der a-priori-Verteilung $\pi := \frac{1}{2}(\lambda + \delta_{1/2})$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $(0, 1)$ und $\delta_{1/2}$ das Dirac-Maß in $1/2$ ist. Bestimmen Sie die a-posteriori-Verteilung von θ gegeben $x = (x_1, \dots, x_n)$.

HINWEIS: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^1 p^a(1-p)^b dp = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$ für $a, b \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 22

(4 Punkte)

Es sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R}^1 mit Lebesgue-Dichte f , Verteilungsfunktion F und $X = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathbb{P} := Q^{(n)}$. Zeigen Sie, dass

$$f_k(x) = \binom{n}{k} k F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} f(x)$$

für alle $1 \leq k \leq n$ die Dichte der k -ten Ordnungsstatistik $X_{(k)}$ ist.

Aufgabe 23

(4 Punkte)

Betrachten Sie zu dem Gleichverteilungsmodell aus Beispiel 3.7 den Median als Schätzer,

$$d_3(X) := \begin{cases} X_{(m)} & \text{für } n = 2m - 1, \\ \frac{1}{2}(X_{(m)} + X_{(m+1)}) & \text{für } n = 2m, \end{cases}$$

und vergleichen Sie dessen Gauss-Verlust mit denen von d_1 und d_2 .

HINWEIS: Für gerade n genügt hier eine Abschätzung. Verwenden Sie dafür ohne Beweis, dass $\text{COV}(X_{(m)}, X_{(m+1)}) \geq 0$. (Für einen Beweis erhalten Sie 2 Bonuspunkte.)

(bitte wenden)

Aufgabe 24

(4 Punkte)

Generieren Sie mittels

```
set.seed(1)
a<-c(rep.int("m", 15), rep.int("w",15))
b<-rep.int(c("A", "B", "C"), 10)
c<-c(rnorm(15, mean=0, sd=1), rnorm(15, mean=1, sd=1))
myframe <- data.frame(a,b,c)
```

Daten für eine zwei-faktorielle Varianzanalyse mit $k = m, w$ und $\ell = A, B, C$. (Siehe Bemerkung 8 im Skript.)

Testen Sie die Hypothesen $\beta_{m\bullet} = \beta_{w\bullet}$ und $\beta_{\bullet A} = \beta_{\bullet B} = \beta_{\bullet C}$ sowie $\beta_{m\bullet} = \beta_{w\bullet} = \beta_{\bullet A} = \beta_{\bullet B} = \beta_{\bullet C}$. Welche Test-Statistiken werden jeweils berechnet?

HINWEIS: Berichten Sie bei Ihrer Abgabe die eingegebenen Befehle und die Größen der Teststatistiken.