

# Übungen zur Vorlesung “Mathematische Statistik“

Wintersemester 2015/16, Blatt 4

**Abgabetermin:** 18.11.2015, zu Beginn der Vorlesung  
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.  
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

## Aufgabe 14

(8 Punkte)

Die Verteilungsfunktion der *Gumbel*-Verteilung mit Parametern  $\beta > 0$  und  $\mu \in \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$F_{(\beta, \mu)}(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{1}{\beta}(x - \mu)\right)\right).$$

Untersuchen Sie für die Familie der zugehörigen Produktmaße

- a)  $(\mathbb{P}_{\beta}^n : \beta > 0)$  bei bekanntem  $\mu$ ,
- b)  $(\mathbb{P}_{\mu}^n : \mu \in \mathbb{R})$  bei bekanntem  $\beta$  und
- c)  $(\mathbb{P}_{(\beta, \mu)}^n : (\beta, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$

bei festem  $n$ , ob es sich um eine Exponentialfamilie handelt und leiten Sie gegebenenfalls den kanonischen Parameterraum her. Bestimmen Sie in jedem Fall eine minimal-suffiziente Statistik und untersuchen Sie diese auf (beschränkte) Vollständigkeit.

## Aufgabe 15

(4 Punkte)

Es sei  $x : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass  $x^{\top}x$  genau dann invertierbar ist, wenn  $\text{Rang}(x) = m + 1$ .

## Aufgabe 16

(4 Punkte)

Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\beta$  und  $\sigma^2$  im Regressionsmodell unter der Normalverteilungsannahme.