Übungen zur Vorlesung
“Mathematische Statistik“

Wintersemester 2015/16, Blatt 3

Abgabetermin: 11.11.2015, zu Beginn der Vorlesung
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 9 (4 Punkte)

a) Überprüfen Sie die suffizienten Statistiken zum Normalverteilungsmodell aus Beispiel 2.7 mit Theorem 2.10 auf Minimalsuffizienz.

b) Bestimmen Sie eine suffiziente Statistik für das Normalverteilungsmodell mit bekanntem Erwartungswert, also $(X = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \{\mathbb{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu, \theta)^n : \theta \in (0, \infty)\})$ bei festem $\mu \in \mathbb{R}$. Ist diese minimalsuffizient?

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Betrachten Sie das Uniformverteilungsmodell (Beispiel 1.8). Es seien $T := t(\underline{X}) := \max_{1 \le i \le n} X_i$ sowie $U := u(\underline{X}) := \operatorname{argmax}_{1 \le i \le n} X_i$, also $X_U = T$.

a) Zeigen Sie, dass U verteilungsfrei ist und $T \perp_{\mathbb{P}_\theta} U$ für alle $\theta \in \mathcal{P}$.

b) Ist $\sigma(T, U) = \sigma(\underline{X})$? Was bedeutet dies für Satz 2.19?

Aufgabe 11 (2 Punkte)

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie sind mehrdimensionale Normalverteilungen bekannt. Sei $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$ und $\mathbb{COV}[X_i, X_j] = \Sigma_{ij}$ für $\mu \in \mathbb{R}^n$ und eine symmetrische, positiv definite Matrix Σ mit $\lambda^\top \underline{X} \sim \mathcal{N}(\lambda^\top \mu, \lambda^\top \Sigma \lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Dann schreibt man $\underline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, wobei die Dichte von $\underline{X}$ gegeben ist durch

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \exp\Big(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \mu)^\top \Sigma^{-1} (\underline{x} - \mu)\Big)$$

für $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\{\mathcal{N}(\mu, \Sigma)\}$ eine Exponentialfamilie ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 12 (3 Punkte)

Wie lautet die Regressiongerade für die Dauer von Eruptionen im `faithful`-Datensatz, wenn man nur solche betrachtet, denen eine Wartezeit von mindestens 70 Minuten vorangegangen ist? Wie unterschiedet sich diese von der Regressionsgerade, denen die Daten mit einer Wartezeit von weniger als 70 Minuten zu Grunde liegt? Berechnen Sie beide Geraden und tragen Sie sie in die Grafik ein. Interpretieren Sie das Schaubild.

Hinweis: Die erstellten Grafiken sind ausgedruckt der Abgabe hinzuzufügen.

Aufgabe 13 (3 Punkte)

Angenommen, die Regressionsgerade mit der Covariaten x und der Zielvariable y lautet $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$, lautet die Regressionsgerade mit der Covariaten y und der Zielvariablen x dann $\hat{x} = -\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1} + \frac{1}{\hat{\beta}_1} y$? Probieren Sie diesen Ansatz für den `faithful`-Datensatz aus. Interpretieren Sie das Schaubild.

Hinweis: Die erstellten Grafiken sind ausgedruckt der Abgabe hinzuzufügen.