Übungen zur Vorlesung "Mathematische Statistik"

Wintersemester 2015/16, Blatt 1

Abgabetermin: 28.10.2015, zu Beginn der Vorlesung
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Geben Sie ein identifizierbares aber nicht reguläres statistisches Modell an.

b) Konstruieren Sie ein statistisches Modell, das regulär aber nicht identifizierbar ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beim Roulette-Spiel gibt es 18 rote Zahlen, 18 schwarze Zahlen und die grüne 0. Bei 1000 beobachteten Spielen sei X_1 die Anzahl der dabei aufgetretenen roten Zahlen, X_2 die der schwarzen Zahlen und X_3 die Anzahl der Nullen. Berechnen Sie die bedingten Verteilungen von X_2 gegeben X_1 und von X_3 gegeben $X_1 + X_2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, exponentialverteilt mit einem unbekannten Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie den Maximum Likelihood-Schätzer für den Parameter λ. Ist der Schätzer erwartungstreu?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Summe n unabhängiger $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilter Zufallsvariablen $\mathrm{Erlang}(n, \lambda)$-verteilt ist, mit Dichte

$$f(x) = \exp(-\lambda x) \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$ und $\sigma^2 := \mathbb{V}(X_1)$ sowie $\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$ ein Schätzer für die Varianz. Zeigen Sie, dass dieser erwartungstreu und konsistent ist.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/2015WiSe/inhalte/2015WiSeStatistik`