Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/

Übung 1

Abgabetermin Hausaufgaben: 9.12.2015 in der Vorlesung

Sei wie in der Vorlesung T eine Stoppzeit auf $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{G}, P)$ und $H_t = \mathbb{1}_{\{t \geq T\}}$, $t \geq 0$ mit der Filtration $\mathbb{G}$ gegeben durch $\mathscr{G}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \vee \mathscr{H}_s$. Die Filtration $\mathbb{H} = (\mathscr{H}_t)_{t \geq 0}$ wird von H erzeugt. Alle Filtrationen erfüllen die "Usual Conditions".

Aufgabe 1. Nehmen Sie an, dass $F(t) = P(T \leq t)$ stetig ist und zeigen Sie, dass

$$M_t := H_t - \int_0^{t \wedge T} \frac{dF(s)}{1 - F(s)}, \quad t \geq 0$$

ein $\mathbb{H}$-Martingal ist.

Aufgabe 2. Nehmen Sie an, dass F sogar absolut stetig ist.

1. Zeigen Sie, dass es eine messbare Funktion λ gibt, so dass

$$Y_t := \mathbb{1}_{\{t<T\}} \exp\left(\int_0^t \lambda(u) du \right)$$

   ein $\mathbb{H}$-Martingal ist.

2. Geben Sie ein Gegenbeispiel an für den Fall, wo F nicht absolut stetig ist.
3. Zeigen Sie, dass $Y_t = \int_0^t Y_{u-} dM_u$ mit M aus der vorigen Aufgabe. Leiten Sie ab, dass

$$P(T > t | \mathscr{H}_s) = \mathbb{1}_{\{T>s\}} \exp\left(- \int_s^t \lambda(u) du \right).$$

Aufgabe 3. Lassen Sie die obigen Annahme der Stetigkeit fallen und zeigen Sie, dass

$$M_t := H_t - \int_0^{t \wedge T} \frac{dF(s)}{1 - F(s-)}, \quad t \geq 0$$

ein $\mathbb{H}$-Martingal ist.