Stochastik (Teil 1) **WS 15/16**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/2015WiSe/inhalte/2015SoSeStochastik

Übung 6

Abgabetermin Hausaufgaben: 28.01.2016, 12 Uhr in den Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Gegeben sei die $\mathbb{R}$-wertige Zufallswariable X mit stetiger Dichte f. Wir definieren die Funktion

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}\left[\exp\left(iuX\right)\right],$$

wobei i die imaginäre Einheit ist und $u \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie zunächst die Wohldefiniertheit von ϕ_X für beliebige Dichte f. Bestimmen Sie ϕ_X nun für

(a) X ist $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt,

(b) X ist exponential verteilt mit Parameter λ,

(c) $f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{(a,b)}(x)$ mit $b > a$,

(d)
$$f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{(x>0)} \text{ mit } b, p > 0 \text{ und } \Gamma(x) = \int_o^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Hinweis: Für die (a) kann es sinnvoll sein eine geeignete Differentialgleichung herzuleiten die Sie lösen können. Gehen Sie davon aus dass Sie Integration und Differentiation vertauschen können falls der Betrag des Integranden durch $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ beschränkt werden kann.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Gegeben Sei eine Likelihoodfunktion $f(x|\theta)$ einer Zufallsvariable X parametrisiert durch $\theta \in \mathbb{R}^d$. Dem Maximum- Likelihood Prinzip folgend, bestimmen Sie für gegebene Beobachtungen $x = (x_1, \dots, x_n)$, alle Beaobachtungen unabhängig voneinander, jenes θ welches die Likelihood maximiert. Betrachten Sie dabei die Fälle:

(a) X ist $\mathrm{Bin}(4, p)$-verteilt.

(b) X ist $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt.

(c) X ist $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt.

(d) X ist $\mathrm{Pois}(\lambda)$-verteilt.

Fasst man θ als Funktion von X auf, so ist auch $\theta(X)$ eine Zufallsvariable. Für $\theta(X) \in \mathbb{R}^d$, bestimmen Sie

$$\mathbb{E}\left[\theta(X)_i\right],$$

wobei $\theta(X)_i$ die i-te Komponente von $\theta(X)$ ist. Als ersten Schritt sollten Sie sich klar machen was genau θ ist, also welche Parameter ihrer Verteilung unbekannt sind.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie für folgende Verteilungen dass sie zur exponentiellen Familie gehören:

(a) Normalverteilung mit unbekanntem μ und σ.

(b) Exponentialverteilung mit unbekanntem λ.

(c) Normalverteilung mit unbekanntem σ.

(d) Poissonverteilung mit unbekanntem λ.

(e) Binomialverteilt mit unbekanntem p.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Gegeben Sei X eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable mit stetiger Dichte f und Y eine von X unabhängige $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable mit stetiger Dichte g. Zeigen Sie dass $X+Y$ die Dichte h hat mit

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

Hinweis: Sie dürfen den Satz von Fubini anwenden, also bei einem Doppelintegral die Reihenfolge der Integration vertauschen.