Stochastik (Teil 1) — WS 15/16

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/2015WiSe/inhalte/2015SoSeStochastik

Übung 5

Abgabetermin Hausaufgaben: 14.01.2016, 12 Uhr in den Briefkästen

Aufgabe 1 (1 + 2 Punkte)**.** Gegeben Sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Auf diesem sei die Folge $(Z_n)_{n\geq 1}$ von Zufallsvariablen gegeben mit

$$P(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} = 1 - P(Z_n = 0),$$

wobei $\alpha \in (0, 1]$. Zeigen oder widerlegen Sie

(a) $Z_n \xrightarrow{p} 0$,

(b) $Z_n \to 0$ fast sicher.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = +\infty$. Zeigen Sie

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \quad \text{existiert und ist endlich}\right) = 0.$$

Zeigen Sie zunächst, dass

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0\right) = 0$$

gilt und nutzen Sie die Eigenschaft $A \subset B, P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Geben Sie für die folgenden Punkte jeweils ein geeignetes Beispiel durch Angabe von Wahrscheinlichkeitsraum und Folge von Zufallsvariablen an. Verifizieren Sie auch ihr Beispiel!

(a) Eine Folge von Zufallsvariablen die im Erwartungswert konvergieren aber nicht fast sicher.

(b) Eine Folge von Zufallsvariablen die fast sicher konvergieren aber nicht im Erwartungswert.

Hinweis: Eine Folge von Zufallsvariablen X_n konvergiert gegen eine Zufallsvariable X im Erwartungswert falls gilt

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0, \textit{ für } n \to \infty.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Es seien X und Y Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert und endlicher Varianz auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P). Für $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ gelte:

$$X(\omega_1) < X(\omega_2) \Rightarrow Y(\omega_1) \leq Y(\omega_2).$$

Zeigen Sie dass dann gilt $\mathrm{Cov}(X, Y) \geq 0$.

Wir wünschen Ihnen allen ein frohes Fest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!