UNI FREIBURG

Stochastik (Teil 1) **WS 15/16**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/2015WiSe/inhalte/2015SoSeStochastik

Übung 4

Abgabetermin Hausaufgaben: 17.12.2015, 12 Uhr in den Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei X $\mathrm{Exp}(\lambda_1)$ verteilt und Y $\mathrm{Exp}(\lambda_2)$. Ferner seien beide unabhängig voneinander. Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariablen Z mit

(a) $Z = \min(X, Y)$

(b) $Z = \max(X, Y)$

(c) $Z = X + Y$

(d) $Z = X^2$

Hinweis: Für eine Zufallsvariable, die Werte in $\mathbb{R}^2$ annimmt, also einen zweidimensionalen Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$, ist die Verteilungsfunktion F definiert durch

$$F(s,t) = P(X_1 \leq s, X_2 \leq t).$$

Der Zufallsvektor heißt absolutstetig, falls ein $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert mit

(i) $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^2$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx = 1$

(iii) $F(s,t) = \int_{-\infty}^{s} \int_{-\infty}^{t} f(x_1, x_2)dx_2 dx_1$.

Die Funktion f heißt Dichte von X bzw. die gemeinsame Dichte von X_1 und X_2.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Sei X ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit Dichte f. Zeigen Sie dass die beiden Komponenten genau dann unabhängig zueinander sind, wenn gilt

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2),$$

wobei f_1 und f_2 beides Dichten eindimensionaler Zufallsvariablen sind mit

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 = 0.$$

Hinweis: Es reicht die Unabhängigkeitsbedingung für abgeschlossene Intervalle zu zeigen.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei X eine Normalverteilte Zufallsvariable, i.e. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir den Erwartungswert

$$\mathbb{E}\left[f(x)\right] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx,$$

wobei ϕ die Dichte von X ist. Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ den Wert von

$$\mathbb{E}\left[X^n\right].$$

Bitte wenden

Aufgabe 4 (1 + 2 + 3 Punkte)**.** Sei Φ eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f_\Phi(x) = c_1 \mathbb{1}_{[-\pi,\pi)}(x)$$

und Θ eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f_\Theta(x) = c_2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x),$$

wobei c_1 und c_2 Konstanten sind und $x \in \mathbb{R}$.

Dann ist durch $G(\Phi, \Theta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \cos \Phi + y \sin \Phi = \Theta\}$ eine zufällige Gerade im $\mathbb{R}^2$ beschrieben, wobei Θ den Abstand der Gerade vom Ursprung angibt.

(a) Bestimmen Sie c_1 und c_2 so, dass f_Φ und f_Θ auch wirklich Dichten sind.

(b) Für ein festes $r \in [0, \infty)$ sei $K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} = r\}$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$P(G(\Phi, \Theta)) \cap K_r \neq \emptyset).$$

(c) Für feste $\rho \in [0, \pi]$ sei $L_\rho = \{(\cos \alpha, \sin \alpha)\mathbb{R}^2 | \alpha \in [-\rho/2, \rho/2)\}$. Bestimmen Sie die Wahtscheinlichkeit

$$P(G(\Phi, \Theta) \cap L_\rho \neq \emptyset)$$

Hinweis: Zeichnen Sie sich für festes Θ die Extremfälle auf, in denen $G(\Phi, \Theta)$ den Kreisbogen L_ρ noch schneidet.