Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi

http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/2015WiSe/inhalte/2015SoSeStochastik

Übung 3

Abgabetermin Hausaufgaben: 03.12.2015, 12 Uhr in den Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_8\}$. Bestimmen Sie die kleinste σ-Algebra die die Menge(n)

(a) $A = \{\omega_1, \omega_3\}$,

(b) $A = \{\omega_1\}$, $B = \{\omega_i : i \in \{2, 4, 6, 8\}\}$,

(c) $A_i = \{\omega_i\}$ für alle $i = 1, \dots, 8$,

(d) $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $B = \{\omega_6, \omega_7\}$

enthält.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablenmit mit Verteilung $P(X_i = u) = 1 - P(X_i = d) = p$, wobei $p \in (0, 1)$ und $0 < d < 1 < u$. Definiere für $S_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben, die Zufallsvariablen

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1.$$

Wir betrachten das Ereignis $A = \{S_n = k\}$, wobei wir $P(A) > 0$ annehmen. Bestimmen Sie p so, dass für alle solche A gilt

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}|A\right] = k.$$

Für dieses p, berechnen Sie für $n = 4$

$$\mathbb{E}\left[\max(S_n - S_0, 0)\right].$$

Schreiben Sie nun ein R programm welches den obigen Ausdruck ausrechnet, wobei die Parameter n, d, u als Eingabewerte übergeben werden (p wird wie oben fest bestimmt und ist kein Parameter der dem Programm übergeben werden muss).

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** In dieser Aufgabe gehen wir stets davon aus dass alle Zufallsvariablen einen endlichen Erwartungswert haben. Für zwei Zufallsvariablen X, Y sei die Kovarianz definiert durch

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[\,(X - \mathbb{E}[X])\,(Y - \mathbb{E}[Y])\,\right]$$

Insbesondere ist dann die Varianz einer Zufallsvariablen X gegeben durch

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Cov}(X, X).$$

(a) Zeigen Sie, dass wenn X und Y unabhängig sind, die Kovarianz verschwindet.

Bitte wenden

(b) Seien die Zufallsvariablen $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ paarweise unabhängig mit Varianzen $\operatorname{Var}(X_i) = \sigma_i^2$, bestimmen Sie

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right).$$

(c) Geben Sie ein Beispiel für zwei Zufallsvariablen ab, deren Kovarianz verschwindet, die aber nicht unabhängig sind.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Disjunkte Ereignisse können unabhängig sein.

(b) Ereignisse können zu sich selbst unabhängig sein.

(c) Aus $P(B|A) > P(B)$ und $P(C|B) > P(C)$ folgt $P(C|A) > P(C)$. Nehmen Sie $P(A), P(B) > 0$ an.