UNI FREIBURG

Stochastik (Teil 1) **WS 15/16**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/2015WiSe/inhalte/2015SoSeStochastik

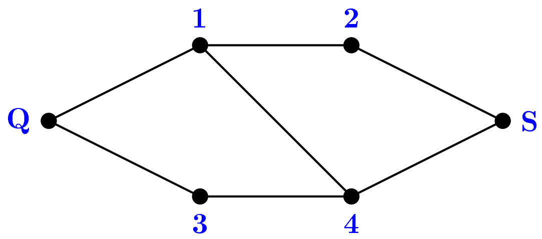
Übung 2

Abgabetermin Hausaufgaben: 19.11.2015, 12 Uhr in den Briefkästen

Eine kurze Anmerkung zur Notation: In der Stochastik werden "Schnitte" in Wahrscheinlichkeiten gerne durch ein Komma angegeben. Es gilt also

$$P(A \cap B) = P(A, B).$$

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Man betrachte folgendes Netzwerk:



Die Konoten Q (Quelle) und S (Senke) sind stets intakt, während die Knoten 1 bis 4 einzeln oder in beliebigen Kombinationen ausfallen können. Ein Parameter $p \in (0, 1)$ bestimmt die Zuverlässigkeit dieser Knoten: Für jede Teilmenge $I \subset \{1, \dots, 4\}$ gilt

$$P(\text{Alle Knoten } i \in I \text{ funktionieren}) = p^{|I|}.$$

Die Verbindung zwischen Q und S funktioniert, wenn es einen Pfad aus funktionierenden Knoten gibt, der Q und S verbindet. Man gebe einen Grundraum Ω an, welcher die Knnotenausfälle beschreibt und berechne mit der Siebformel die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $F :=$ "Die Verbindung zwischen Q und S funktioniert".

Sei nun X die Zufallsvariable die die Anzahl der ausgefallenen Knoten angibt. Bestimmen Sie

$$\mathbb{E}\left[X\right] \text{ und } \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right]$$

Hinweis: Auch $(X - \mathbb{E}[X])^2$ *ist eine Zufallsvariable.*

Sei nun B das Ereignis das maximal drei Knoten ausfallen. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X|B]$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei X eine Poisson verteilte Zufallsvariable mit Intensität λ. Bestimmen Sie

$$\mathbb{E}\left[\exp(uX)\right], u \in \mathbb{R}.$$

Bitte wenden

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Seien X_1, X_2 Poissonverteilte Zufallsvariablen mit jeweiliger Intensität λ_1, λ_2 für die gilt

$$P(X_1 = k, X_2 = l) = P(X_1 = k)P(X_2 = l) \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie dass dann $X = X_1 + X_2$ eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit Intensität $\lambda_1 + \lambda_2$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$ mit $P(B) > 0$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

(b) $P(B) < 1 \Rightarrow P(A|B^c) = 1 - P(A|B)$

(c) $B \subset A \Rightarrow P(A|B) = 1$

(d) $P(B) = 1 \Rightarrow P(A|B) = P(A)$

(e) $P(A|A \cup B) \geq P(A|B)$

(f) $P(A|B) \geq P(A)$

(g) $P(A|B) \geq P(B)$

(h) $P(A|B) \geq P(A \cap B)$

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Es werde eine zufällige Person aus Deutschland ausgewählt. Sei B das Ereignis dass die zufällig ausgewählte Person HIV positiv ist. Für einen gegebenen HIV Test sei A das Ereignis dass der Test positiv ausfällt. Wir nehmen an:

$$P(B) = \frac{1}{1000}\ , \ P(A|B) = \frac{98}{100}\ , \ P(A^c|B^c) = \frac{99}{100}.$$

Bestimmen Sie $P(B|A)$ und $P(B|A^c)$.