Stochastik (Teil 1) **WS 15/16**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/2015WiSe/inhalte/2015SoSeStochastik

Übung 1

Abgabetermin Hausaufgaben: 5.11.2015, 12 Uhr in den Briefkästen

Kurze Anmerkung zu Blatt 0, Aufgabe 4 b):

Ein kürzerer und eleganterer Weg die Aufgabe zu lösen ist gegeben durch die Anwendung von 4 a),

$$P(\max_{i\in\{1,2,3,4\}} X_i = 4) = P(\max_{i\in\{1,2,3,4\}} X_i \leq 4) - P(\max_{i\in\{1,2,3,4\}} X_i \leq 3) = \frac{4^4 - 3^4}{6^4}.$$

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Für $(A_i)_{i=1}^n, A_i \subset \Omega\ \forall i$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß P, zeigen Sie

$$P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots i_k\leq n} P\left(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right).$$

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die Formel für kleine n und führen Sie dann Induktion durch.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Sei $\Omega = \mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus 0$. Zeigen Sie dass durch

$$P(A) = \sum_{k\in A} p(1-p)^{k-1}, A \subset \Omega$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω definiert wird

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)**.** Eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ der Länge n ist eine Bewegung auf $\mathbb{Z}$ in der pro Schritt die Position sich nur um der Wert $+1$ oder -1 verändert. Eine Bewegung kann daher identifiziert werden mit einem $n+1$-Tupel $(S_0,\ldots,S_n)$, wobei S_i die Position im Schritt i ist. Insbesondere gilt

$$S_{k+1} - S_k \in \{-1,1\} \qquad \forall k = 0,\ldots,n-1.$$

Sei $\Omega = \{(x_1,\ldots,x_n) : x_i \in \{-1,1\}\}$. Definiere die Zufallsvariable $X_k(\omega) = x_k$. Fixiert man einen Startwert S_0, so kann jede Irrfahrt mit Startwert S_0 eindeutig dargestellt werden durch

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n X_k(\omega).$$

Bitte wenden

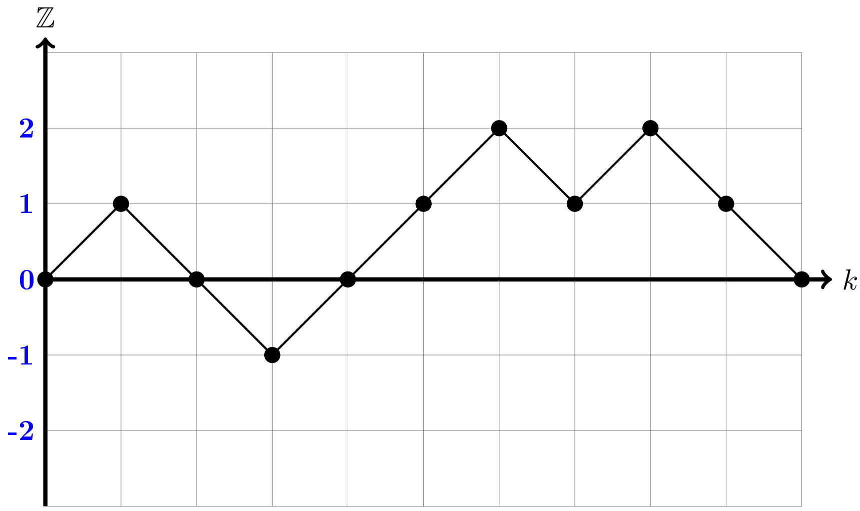

Figure 1: Beispiel eines Pfades der Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ beginnend im Ursprung. Hier ist $S_0 = 0$.

Fixiere S_0. Sei P die Gleichverteilung auf Ω, d.h.

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^n}.$$

Ein möglicher Pfad einer sollchen Irrfahrtmit $S_0 = 0$ findet sich in Figure 1.

(a) Zeigen Sie

$$P(S_{l+1} - S_l = i \cap S_l - S_{l-1} = j) = P(S_{l+1} - S_l = i)P(S_l - S_{l-1} = j),$$

wobei $i, j \in \{-1, 1\}$. Diese Eigenschaft werden wir später als Unabhängigkeit kennenlernen.

(b) Bestimmen Sie $P(S_n = b)$ für $b \in \mathbb{Z}$ beliebig für $S_0 = 0$.

Wir setzen nun allgemein $S_0 = a$. P ist weiterhin die Gleichverteilung auf Ω. Bezeichne $N(a, b)$ die Anzahl der Pfade in Ω mit $S_0 = a$ und $S_n = b$. Ferner bezeichne $N^{\neq 0}(a, b)$ die Anzahl jener Pfade die zu keinem Zeitpunkt $i > 0$ den Ursprung berühren. Entsprechend ist $N^0(a, b)$ die Anzahl jener, die den Ursprung zu einem Zeitpunkt $i > 0$ berühren.

(c) Zeigen Sie $N^0(a, b) = N(-a, b)$ für $a, b > 0$.

(d) Zeigen Sie $N^{\neq 0}(a, b) = N(a, b) - N(-a, b)$ für $a, b > 0$.

Die letzten beiden Resultate werden als Spiegelungsprinzip bezeichnet.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Ein bekannter Mathematiker hatte in beiden Jackentaschen stets jeweils eine Schachtel mit Streichhölzern. Er bediente sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit links oder rechts und hatte zu Beginn N Streichhölzer in jeder Tasche. Fand er eine leere Schachtel vor, ersetzte er beide Schachteln durch neue volle. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau k Streichhölzer weggeworfen werden.