Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2015/16 - Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 07.01.2016 vor Beginn der Vorlesung

Bitte vermerken Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen.

Aufgabe 33 (4 Punkte)
Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\Omega_k := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\mathcal{A}_k$ die Potenzmenge von Ω_k. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $(\Omega, \mathcal{A}) := (\prod_{k=0}^{\infty} \Omega_k, \bigotimes_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k)$ mit Übergangsmatrix

$$\Pi := \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie

$$\Pi^n = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 4 - 18\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 3 + 18\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ 0 & 4 + 3\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 3 - 3\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ 0 & 4 - 4\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 3 + 4\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie $\Pi^\infty := \lim_{n\to\infty} \Pi^n$.

b) Folgern Sie $\varrho_\infty := \varrho_0 \Pi^\infty = \frac{1}{7}(0, 4, 3)$ für jede Startverteilung ϱ_0. Wie läßt sich ϱ_∞ interpretieren?

Aufgabe 34 (4 Punkte)
Es sei Π die Übergangsmatrix des Ehrenfestschen Urnenmodells. Für ein $\varepsilon > 0$ definieren wir eine neue Markovkette mit der Übergangsmatrix $\Pi_\varepsilon := (1-\varepsilon)\Pi + \varepsilon I$. Zeigen Sie dass $\Pi^n_{\varepsilon\ i,j} \to \varrho_j$, wobei $\varrho = \mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$ die Binomialverteilung ist.

Aufgabe 35 (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine homogene Markovkette in einem endlichen Zustandsraum E mit Übergangsmatrix $(p_{ij})_{1\le i,j\le |E|}$, so dass es ein $k \geq 1$ gibt mit $p_{ij}^{(k)} > 0$ für alle $i, j \in E$ und $p_{ij} = 0$ genau dann gilt, wenn $p_{ji} = 0$ ist. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann reversibel ist, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Zustände $i_1, i_2; \ldots, i_n \in E$ gilt

$$p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{n-1} i_n} p_{i_n i_1} = p_{i_1 i_n} p_{i_n i_{n-1}} \cdots p_{i_3 i_2} p_{i_2 i_1}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 36 (4 Punkte)
Früher (vor 2006) wurde beim Badminton so lange gespielt, bis ein Spieler mindestens 15 Punkte und zwei Punkte mehr als der Gegner hat. Ein Spieler erhält einen Punkt, wenn er aufgeschlagen hat und der Gegner einen Fehler macht. Macht der aufschlagende Spieler einen Fehler, so wechselt das Aufschlagrecht und kein Spieler erhält einen Punkt.
Zwei gleichstarke Spieler spielen Badminton. Jeder Spieler macht bei eigenem Aufschlag mit der Wahrscheinlichkeit p einen Punkt. Beim Stand von 14 : 14 lässt sich der weitere Spielverlauf als Markovkette mit 8 Zuständen (Gleichstand, Vorteil A bzw. B (jeweils mit Aufschlag A bzw. B) und Sieg A bzw. B) modellieren.

a) Stellen Sie die Markovkette graphisch dar und geben Sie die Übergangsmatrix an.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit des Startzustandes der Markovkette die Wahrscheinlichkeit, mit der Spieler A gewinnt.

Hinweis: Der Eigenraum der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & -1 & 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & -1 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & p & 0 & 1-p & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & -1 & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & -1 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert 0 wird von den Vektoren

$$\left(\frac{4-3p}{1-p}, \frac{3-2p}{1-p}, 3, 2, \frac{2-p}{1-p}, \frac{1}{1-p}, 1, 0\right)^T$$

und

$$\left(\frac{2p-3}{1-p}, \frac{p-2}{1-p}, -2, -1, \frac{-1}{1-p}, \frac{-p}{1-p}, 0, 1\right)^T$$

aufgespannt.