Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2015/16 - Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, 17.12.2015 vor Beginn der Vorlesung

Bitte vermerken Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen.

Aufgabe 29 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass ein stochastischer Prozess mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) aus Beispiel 9.1 ein Wiener Prozess ist.

Aufgabe 30 (4 Punkte)
Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ eine Zufallsvariable und für $k \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathcal{A}$

$$\tilde{K}(k, A) := \begin{cases} \frac{P(A \cap \{X=k\})}{P(X=k)}, & \text{falls } P(X = k) > 0, \\ P(A), & \text{falls } P(X = k) = 0. \end{cases}$$

Für $\omega \in \Omega$ und $A \in \mathcal{A}$ definieren wir $K(\omega, A) := \tilde{K}(X(\omega), A)$. Zeigen Sie

a) $\tilde{K} : \mathbb{N}_0 \times \mathcal{A} \to [0, 1]$ ist ein Markovkern von $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ nach $(\Omega, \mathcal{A})$,

b) $K : \Omega \times \mathcal{A} \to [0, 1]$ ist ein Markovkern von $(\Omega, \sigma(X))$ nach $(\Omega, \mathcal{A})$ und

c) für alle $A \in \mathcal{A}$ und $C \in \sigma(X)$ ist $E[\mathbb{1}_C K(\cdot, A)] = E[\mathbb{1}_C \mathbb{1}_A]$.

Aufgabe 31 (4 Punkte)
Seien $P_{s,t}$, $0 < s < t$, Markovkerne von $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ nach $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ mit

$$P_{s,t}(x, B) = \int P_{s,\tau}(x, dy) P_{\tau,t}(y, B), \quad \forall B \in \mathcal{B}^1, \tau \in (s, t)$$

und $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(z, y) = y$ die Projektion auf die zweite Koordinate. Zeigen Sie: für $\tau \in (s, t)$ gilt $P_{s,t} = (P_{s,\tau} \otimes P_{\tau,t})^\pi$.

Aufgabe 32 (4 Punkte)
Sei $S \in \mathbb{N}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, \ldots, S\}$. Seien $X_0 \in \{0, \ldots, S\}$, $s \in \{0, \ldots, S - 1\}$ und

$$X_{n+1} := \begin{cases} (X_n - Z_{n+1})_+, & \text{falls } s < X_n \leq S, \\ S - Z_{n+1}, & \text{falls } 0 \leq X_n \leq s. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markovkette ist, und bestimmen Sie die Übergangsmatrix.