Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2015/16 - Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, 10.12.2015 vor Beginn der Vorlesung

Bitte vermerken Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen.

Aufgabe 25 (4 Punkte)
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $X_i \geq 0, \forall i$, mit $0 < \mu := EX_1 < \infty$ gegeben. Sei $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ und

$$N_t := \max\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}.$$

Zeigen Sie:

a) $N_t \longrightarrow \infty \; [P], \quad t \to \infty.$

b) $\frac{N_t}{t} \longrightarrow \frac{1}{\mu} \; [P], \quad t \to \infty.$

Aufgabe 26 (4 Punkte)
Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion und $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Wir definieren $Z_n := \mathbb{1}_{\{Y_n < f(X_n)\}}$.

a) Zeigen Sie

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \to \int_0^1 f(x)dx \quad P\text{-fast-sicher.}$$

b) Bestimmen Sie eine Zahl n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i - \int_0^1 f(x)dx\right| \leq 0{,}01\right) \geq 0{,}95.$$

Aufgabe 27 (4 Punkte)
Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion, d.h. rechtsseitig stetig und monoton wachsend mit $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 1 - \lim_{x\to\infty} F(x) = 0$. Wir definieren $F^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}$. Zeigen sie

a) F^{-1} ist monoton wachsend,

b) $F \circ F^{-1}(u) \geq u$ für alle $u \in [0,1]$,

c) $F^{-1} \circ F(x) \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

d) für $u \in [0,1]$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $F(x) \geq u$ genau dann, wenn $x \geq F^{-1}(u)$.

Aufgabe 28 (4 Punkte)
Sei $T \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und $(\Omega_t, \mathcal{A}_t)$ ein Messraum für jedes $t \in T$. Zeigen Sie, dass die Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_{t\in T} \mathcal{A}_t$ die folgende Darstellung besitzt:

$$\bigotimes_{t\in T} \mathcal{A}_t = \bigcup_{\substack{F\subset T \\ F \text{ abzählbar}}} \left\{ B_F := A_F \times \prod_{t\in T\setminus F} \Omega_t \mid A_F \in \bigotimes_{t\in F} \mathcal{A}_t \right\}.$$

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/2015WiSe/inhalte/2015WiSeWTheorie`