Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2015/16 - Blatt 13

Abgabe: Donnerstag, 04.02.2016 vor Beginn der Vorlesung

Bitte vermerken Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen.

Aufgabe 48 (4 Punkte)
Sei φ die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $t_0 \neq 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $\varphi(t_0) = 1$
2. $\varphi(u + mt_0) = \varphi(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$
3. $supp(P) \subset \{k\frac{2\pi}{t_0} : k \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 49 (4 Punkte)
Seien X, Y reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen aus

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ nicht folgt, dass X und Y stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 50 (4 Punkte)

1. Seien X, Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, f_Y die Lebesguedichte der Verteilung von Y und φ_X die charakteristische Funktion von X. Zeigen Sie, dass für die charakteristische Funktion des Produkts XY gilt

$$\varphi_{XY}(t) = \int \varphi_X(ty) f_Y(y) dy.$$

2. Die *Doppelexponentialverteilung* $DExp(\mu, \sigma)$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ ist gegeben durch die Lebesguedichte $f(x) = 1/(2\sigma)\exp(-|x-\mu|/\sigma)$. Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion der Doppelexponentialverteilung $DExp(\mu, \sigma)$ gegeben ist durch

$$\varphi_{DExp(\mu,\sigma)}(t) = e^{i\mu t}\frac{1}{1+\sigma^2 t^2}.$$

3. Seien X_1, X_2, X_3, X_4 stochastisch unabhängige, $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $X_1X_2 - X_3X_4$ doppelexponentialverteilt mit Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ ist.

Aufgabe 51 (4 Punkte)
Sei X eine reelle Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ_X und $EX^2 < \infty$. Für $\sigma > 0$ sei

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\varphi_X(t) - 1}{t^2} = -\frac{\sigma^2}{2}.$$

Zeigen Sie: $EX = 0$ und $EX^2 = \sigma^2$.