Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2015/16 - Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 14.01.2016 vor Beginn der Vorlesung

Bitte vermerken Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen.

Aufgabe 37 (4 Punkte)
Gegeben ist eine Markovkette in dem Zustandsraum $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mit der Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die kommunizierenden Klassen, die zugehörigen Perioden und alle rekurrenten Zustände.

Aufgabe 38 (4 Punkte)
Ein Teilchen führt einen Random Walk auf den Ecken eines Würfels aus. In jedem Schritt verbleibt es mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/4$ an der Ecke, oder wechselt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/4$ zu einer der drei benachbarten Ecken. Seien v und w zwei diametral gegenüberliegende Ecken. Das Teilchen startet in der Ecke v. Bestimmen Sie

a) die mittlere Anzahl von Schritten, bis das Teilchen wieder in die Ecke v zurückkehrt,

b) die mittlere Anzahl von Schritten, die das Teilchen benötigt, um zur Ecke w zu gelangen, und

c) die mittlere Anzahl von Besuchen des Teilchens in w, bevor es zum ersten Mal wieder in die Ecke v zurückkehrt.

Aufgabe 39 (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markovkette in einem Zustandsraum E und $s \in E$ ein absorbierender Zustand, so dass für alle $i \in E$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_{is}^{(n)} > 0$. Zeigen Sie, dass alle Zustände außer s transient sind.

Aufgabe 40 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Beispiel 10.4, wobei abweichend von den Voraussetzungen für $l \in \{1, \ldots, N-1\}$ auch $P(\xi_1 = l) = 0$ möglich ist. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irreduzibel ist und für die Periode d gilt $d = ggT\{n \mid P(\xi_1 = n) > 0\}$.