Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2015/16 - Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 29.10.2015 vor Beginn der Vorlesung

Bitte vermerken Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen.

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{E}$ ein Semiring. Zeigen Sie:

a) Für $A, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$ gibt es paarweise disjunkte Mengen $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{E}$, so dass $A \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i = \sum_{j=1}^m C_j$ gilt.

b) $\mathcal{R}(\mathcal{E}) = \{\sum_{j=1}^n I_j \mid (I_j) \subset \mathcal{E} \text{ paarweise disjunkt}\}$.

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge von Mengen. Zeigen Sie:

1. ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, d.h. $A_n \subset A_{n+1}$ (bzw. $A_{n+1} \subset A_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$,
2. gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mu(\bigcup_{n\geq m} A_n) < \infty$, so gilt
$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ der Ring der eindimensionalen Figuren. Für eine Menge $A \in \mathcal{F}$ definieren wir $\mu(A) := \left|A \cap \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}\right|$, wobei $|\cdot|$ die Mächtigkeit einer Menge bezeichnet. Zeigen Sie, dass μ ein Prämaß auf $\mathcal{F}$ ist, indem Sie Stetigkeit von unten zeigen.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{E}$ ein Semiring und $\mu : \mathcal{E} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein Inhalt. Zeigen Sie, dass es genau eine Fortsetzung $\nu : \mathcal{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ von μ zu einem Inhalt auf $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ gibt.