# Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

**WS 2015/16 - Blatt 6**

**Abgabe:** Donnerstag, 03.12.2015 vor Beginn der Vorlesung

Bitte vermerken Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen.

**Aufgabe 21** (4 Punkte)
Mit einem Startkapital von 1 Euro spielen Sie folgendes Glücksspiel: Wenn Ihr Kapital vor der $n$-ten Runde $K_{n-1}$ beträgt, gewinnen Sie in der $n$-ten Runde nach dem Wurf einer fairen Münze $\frac{2}{3}K_{n-1}$ dazu, sofern Kopf erscheint, sonst verlieren Sie $\frac{1}{2}K_{n-1}$.

a) Berechnen Sie $EK_n$, und überzeugen Sie sich, dass $\lim_{n\to\infty} EK_n = \infty$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $K_n$ stochastisch gegen 0 konvergiert.

**Hinweis:** Für $n \in \mathbb{N}$ ist $K_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ mit stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $Y_i$. Betrachten Sie in Teil b) die Zufallsvariable $\log K_n$ und wenden Sie das schwache Gesetz großer Zahlen an.

**Aufgabe 22** (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n\log n} \quad \text{und} \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}.$$

Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen, aber nicht dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt.
**Hinweis:** Zeigen Sie, dass aus der Gültigkeit des starken Gesetzes folgen würde: $\frac{X_n}{n} \to 0$ $P$-fast-sicher.

**Aufgabe 23** (4 Punkte)
Sei $M, K \in \mathbb{R}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}(X_n) \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $X_i$ und $X_j$ unkorreliert sind, wenn $|i-j| > K$ ist. Zeigen Sie für $Z_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)$ gilt $Z_{n^2} \to 0$ $P$-fast-sicher.

**Aufgabe 24** (4 Punkte)
Es sei $U$ eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Weiter sei $X := \cos(2\pi U)$ sowie $Y := \sin(2\pi U)$. Zeigen Sie $X$ und $Y$ sind unkorreliert aber nicht unabhängig.