Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2015/16 - Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 26.11.2015 vor Beginn der Vorlesung

Bitte vermerken Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen.

Aufgabe 17 (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen, integrierbaren Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichgradig integrierbar ist, wenn die beiden folgen Aussagen gelten:

a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} E|X_n| < \infty$

b) für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\int_A |X_n| dP \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, wenn $P(A) \leq \delta$ ist.

Aufgabe 18 (4 Punkte)
Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller, integrierbarer Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X_n \leq Y_n \leq Z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $X_n \to_P X$, $Y_n \to_P Y$ und $Z_n \to_P Z$. Zeigen Sie:

a) $X_n + Y_n \to_P X + Y$.

b) Gilt zusätzlich $E[X_n] \to E[X]$ und $E[Z_n] \to E[Z]$, so folgt $E[Y_n] \to E[Y]$.

Aufgabe 19 (4 Punkte)
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei eine Folge von unabhängigen, identisch zum Parameter $\alpha > 0$ exponentialverteilten Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Zeigen Sie

a) $P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = \frac{1}{\alpha}) = 1$

b) $P(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 0) = 1.$

Aufgabe 20 (4 Punkte)
Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ wird ein Zufallsexperiment unabhängig wiederholt. Es sei A_n das Ereignis, im $n$ten Versuch einen Erfolg zu erzielen, wobei $P(A_n) = p, \forall n \in \mathbb{N}$. Das Ereignis

$$A_{n,m} := \bigcap_{n \leq k < n+m} A_k$$

bezeichnet eine mit dem $n$ten Versuch beginnende Erfolgsserie der Länge m. Zeigen Sie für $\alpha > 0$:

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_{n,\lceil \alpha \ln n \rceil}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{1}{\alpha} < \ln \frac{1}{p}, \\ 1, & \text{falls } \frac{1}{\alpha} > \ln \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes $\delta > 0$ und zeigen Sie, dass die Folge $(A_{\lceil k^{1+\delta} \rceil, \lceil \alpha \ln \lceil k^{1+\delta} \rceil \rceil})_{k \geq k_0}$, $k_0 \in \mathbb{N}$, unabhängig ist.