Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2015/16 - Blatt 4

Abgabe: Donnerstag, 19.11.2015 vor Beginn der Vorlesung

Bitte vermerken Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen.

Aufgabe 13 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine exponentialverteilte Zufallsvariable, d.h. P^X hat bzgl. des Lebesguemaßes die Dichte $f_X(x) = ce^{-cx}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ mit $c > 0$.
Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Y = \max\{X, 1\}$ und die Lebesguezerlegung $\nu_1 + \nu_2$ von $\nu = P^Y$ bzgl. des Lebesguemaßes auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Aufgabe 14 (4 Punkte)
Es seien X, Y wie in Aufgabe 13. Berechnen Sie für $a > 0$ und $Z_a = e^{-aX}$ die Werte $\mathbf{E}[Y]$, $\mathbf{V}[Y]$, $\mathbf{E}[Z_a]$, $\mathbf{V}[Z_a]$ und $\mathbf{COV}[Y, Z_a]$.

Aufgabe 15 (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{A}' := \{A \in \mathcal{A} \mid P(A) \in \{0, 1\}\}$. Zeigen Sie

a) $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ ist eine Unter-σ-Algebra,

b) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ sind stochastisch unabhängig.

c) $\mathcal{A}'$ ist von sich selbst unabhängig.

Aufgabe 16 (4 Punkte)
Seien N, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ und $P^{X_n} = f_n\lambda$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

1. $S_N := \sum_{n=1}^{N} X_n$ ist messbar,
2. die Funktion
$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n)(f_1 * \ldots * f_n)(x)$$
ist eine Lebesguedichte von P^{S_N}.