# Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

**WS 2015/16 - Blatt 3**

**Abgabe:** Donnerstag, 12.11.2015 vor Beginn der Vorlesung

Bitte vermerken Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen.

**Aufgabe 9** (4 Punkte)
Bestimmen Sie das Bildmaß von $\lambda^2$ unter der Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to [0,1) \times [0,\infty)$ mit $(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mapsto (\frac{\varphi}{2\pi}, r)$ für $r \neq 0$ und $T(0) := 0$.

**Aufgabe 10** (4 Punkte)
Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ für $i = 1, 2$ und $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ der Produktraum.

a) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge $A \subset \Omega$, für die für alle $\omega_i \in [0,1]$ der $\omega_i$-Schnitt $A_{\omega_i} \in \mathcal{A}_j$ ist (für $i, j = 1, 2$ und $i \neq j$), aber $A \notin \mathcal{A}$ gilt.

b) Sei $D = \{(x, x) \mid x \in [0,1]\}$ die Diagonale in $\Omega$, $\lambda$ das Lebesguemaß auf $\Omega_1$ und $\mu$ das Zählmaß auf $\Omega_2$, d.h.

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie $D \in \mathcal{A}$, und berechnen Sie

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_D(x,y) d\lambda(x) d\mu(y) \qquad \text{und} \qquad \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_D(x,y) d\mu(y) d\lambda(x).$$

c) Ist das Ergebnis in Teil b) ein Widerspruch zum Satz von Fubini?

**Aufgabe 11** (4 Punkte)
Zeigen Sie die Eindeutigkeit im Lebesgueschen Zerlegungssatz.

**Aufgabe 12** (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mu) \cap \bar{Z}_+$ mit $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu < \infty$. Weiter gebe es eine messbare Funktion $f$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f[\mu]$. Zeigen Sie:

a) $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

b) $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu - \int f d\mu$