Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2015/16 - Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 05.11.2015 vor Beginn der Vorlesung

Bitte vermerken Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ der Ring der eindimensionalen Figuren. Für eine Menge $A \in \mathcal{F}$ definieren wir $\mu(A) := \left|A \cap \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}\right|$, wobei $|\cdot|$ die Mächtigkeit einer Menge bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass μ nicht σ-endlich auf $\mathcal{F}$ ist.

b) Geben Sie zwei verschiedene Fortsetzungen von μ zu einem Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ an.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über einer Menge Ω und $\mu : \mathcal{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ein Prämaß. Sei weiter $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ das äußere Maß, wie im Beweis zum Maßerweiterungssatz von Caratheodory, $\bar{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{A}}$ die Fortsetzung von μ auf $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R})$, $\mathcal{A}_{\bar{\mu}}$ die $\bar{\mu}$-Vervollständigung von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}^*$ die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen.

a) Zeigen Sie, dass es für jedes $Q \subset \Omega$ ein $A \in \mathcal{A}$ gibt mit $\bar{\mu}(A) = \mu^*(Q)$ und $Q \subset A$.

b) Zeigen Sie: Ist μ σ-endlich, so gilt $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}_{\bar{\mu}}$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$. Bestimmen Sie alle $(\sigma(f), \mathcal{B})$-messbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge numerischer messbarer Funktionen. Zeigen Sie:

a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sind numerisch und messbar;

b) $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sind numerisch und messbar.