Übungsaufgaben zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2015/16 - Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1
Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $(\mathcal{R}, \triangle, \cap)$ ist ein Ring im Sinne der Algebra.

b) $\emptyset \in \mathcal{R}$ und für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A \triangle B \in \mathcal{R}$, $A \cap B \in \mathcal{R}$.

c) $\emptyset \in \mathcal{R}$ und für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A \triangle B \in \mathcal{R}$, $A \cup B \in \mathcal{R}$.

d) $\mathcal{R}$ ist ein Ring im Sinne der Maßtheorie.

Aufgabe 2
Sei Ω eine endliche Menge, sei $|\Omega| \geq 4$ und gerade. Es sei

$$\mathcal{D} := \{D \subset \Omega |\, |D| \in 2\mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, aber keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 3
Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengensysteme jeweils einen Semiring, einen Ring oder eine σ-Algebra bilden.

a) $\mathcal{A} := \{N \subset \mathbb{N} : |N| < \infty \vee |N^c| < \infty\}$,

b) $\mathcal{B} := \{N \subset \mathbb{N} : |N| = \infty \vee |N^c| = \infty\}$,

c) $\mathcal{C} := \{N \subset \mathbb{R} : |N| = \infty \wedge |N^c| = \infty\}$.

Aufgabe 4
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring (eine Algebra, eine σ-Algebra). Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{B \subset Y |\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

ein Ring (eine Algebra, eine σ-Algebra) ist.