UNI FREIBURG

Stochastische Integration und Finanzmathematik SS 2016

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochIntFinSS2016

Übung 8

Abgabe: 21.06.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie das Ho-Lee Short-Rate-Modell mit Risikoneutralem Maß $\mathbb{Q}$ in welchem der Short-Rate Prozess die $\mathbb{Q}$-Dynamiken

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0$$

hat. Dabei ist W eine $\mathbb{Q}$-Brown'sche Bewegung und b eine stetige Funktion. Bestimmen Sie die Preise $P(t,T)$ von Nullkuponanleihen (Bonds) in diesem Modell. Bestimmen Sie ferner die Funktion b so, dass $f(t,T) = f_0(T)$ gilt, wobei f_0 die am Markt beobachtete Forward Kurve zum Zeitpunkt $t = 0$ ist. Sie dürfen annehmen dass f_0 glatt ist. Lösen Sie die SDE für diese Wahl von b.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie das CIR-Modell mit Risikoneutralen $\mathbb{Q}$-Shortrate-Dynamiken

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t),$$

mit W eine $\mathbb{Q}$-Brown'sche Bewegung und b, β, σ Konstanten. Ferner soll gelten

$$\beta^2 - 2\sigma^2 > 0.$$

Bestimmen Sie $P(t,T)$ in diesem Modell. Dabei müssen Sie eine quadratische gewöhnliche Differentialgleichung lösen. Transformieren Sie dazu diese ODE in eine lineare ODE zweiter Ordnung indem Sie die quadratische ODE in Normalform bringen und dann die Transformation $y = -u'/u$ betrachten.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie das Hull-White Modell mit $\mathbb{Q}$-Short-Rate Dynamiken

$$dr(t) = (b(t) + \beta r(t))dt + \sigma dW(t).$$

Betimmen Sie $P(t,T)$ und geben Sie $f(t,T)$ an wobei für bekanntes glattes $f_0(T)$ der Perfekte Fit gelten soll, d.h. es soll gelten

$$f(0,T) = f_0(T).$$

Zur Überprüfung: Sie sollen hergeleitet haben, dass

$$f(t,T) = f_0(T) - e^{\beta(T-t)}f_0(t) - \frac{\sigma^2}{2\beta^2}\left(e^{\beta(T-t)} - 1\right)\left(e^{\beta(T-t)} - e^{\beta(T+t)}\right) + e^{\beta(T-t)}r(t)$$

gilt.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie die folgende Aussage:

Sei $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße mit Dichte-Prozess $Z(t) = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$. Sei X eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|X|] < \infty$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}_t] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ(T)|\mathcal{F}_t]}{Z(t)}, \quad t \leq T.$$

Zeigen Sie im Anschluss dass ein adaptierter Prozess M genau dann ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist, wenn ZM ein $\mathbb{P}$-Martingal ist.