Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochIntFinSS2016

Übung 7

Abgabe: 14.06.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** Betrachten Sie ein Finanzmarkt Modell in dem es eine mit Risiko behaftete Aktie $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ gibt. Sei $h : (0,T) \to \mathbb{R}$ eine C^2 Funktion. Betrachten Sie eine Option auf S mit terminaler Auszahlung $H = h(S_T)$. Zeigen Sie, dass

$$H = h(S_0) + h'(S_0)(S_T - S_0) + \int_0^{S_0} (K - S_T)^+ h''(K)dK + \int_{S_0}^{\infty} (S_T - K)^+ h''(K)dK$$

gilt. Diskutieren Sie diese Gleichung bzgl. des Hedgens (Absicherns) für H.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}_W, P)$ und Brown'scher Bewegung W (welche die Filtration erzeugt) und endlichem Zeithorizont $T > 0$. Sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Ferner, sei

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad M_t^X = \sup_{s\in[0,t]} X_s.$$

Definiere $\hat{X}_t = X_t/\sigma$ und $\hat{M}_t^X = \sup_{s\in[0,t]} \hat{X}_s$. Für $t \in (0,T]$ und $w \leq m, m > 0$ ist die P-Dichte von $(\hat{X}_t, \hat{M}_t^X)$ ist gegeben durch

$$f(w,m) = \frac{2(2m-w)}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\gamma w - \frac{1}{2}\gamma^2 t - \frac{2(2m-w)^2}{2t}\right).$$

Dabei ist $\gamma = \mu/\sigma$. Zeigen Sie nun für $x \leq y, y > 0$

$$P(X_t \leq x, M_t^X \leq y) = \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y\sigma^{-2}} \Phi\left(\frac{x - 2y - \mu t}{\sigma\sqrt{(t)}}\right).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie ein klassisches Black-Scholes Modell. Sei $H, K \in \mathbb{R}_+$ und $H \leq S_0$. Zeigen Sie, dass der Preis der "down-and-out" Call Option mit Terminalem Payoff

$$Y(T) = (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{S_t > H \forall t\in[0,T]\}}$$

ist gegeben durch

Bitte wenden

$$
\begin{aligned}
\Pi_0^Y =& S_0 \left(\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2+\frac{2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{H^2}{KS_0}\right) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right) \\
&- e^{-rT} K \left(\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{H^2}{KS_0}\right) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right).
\end{aligned}
$$

Hinweis: Nutzen Sie die vorige Aufgabe um zu zeigen, dass

$$
P(\mu t + \sigma W_t \leq x, \max_{s\in[0,t]} (\mu t + \sigma W_t) \geq y) = e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{x - 2y - \mu t}{\sigma\sqrt{t}} \right).
$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Jeweils für das Vasicek und das CIR Modell, führen Sie die folgenden Schritte durch:

Diskretisieren Sie die SDE nach einem Euler-Schema um eine Monte-Carlo-Simulation für r zu erhalten. Schreiben Sie die Monte-Carlo-Simulation mit N Simulationen von r als Pseudo-Code. Die Zeitdiskretisierung habe die Schrittweite Δ_t. Implementieren Sie diese Simulation in R und bestimmen Sie damit approximativ den Wert

$$
\mathbb{E}\left[\exp(\int_0^T r_s ds) \right].
$$

Für das Vasicek-Modell, vergleichen Sie die Approximation mit dem tatsächlichen Wert. Plotten Sie ihre Ergebnisse und geben Sie diese mit ab. Nutzen Sie die Parameter

$$
T = 1, N = 1000, \Delta_t = 10^{-3}, \sigma = 0.2, \beta = -0.5, b = 0.1 \quad .
$$