# Übungen zur Vorlesung „Stochastik für Studierende der Informatik“

http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochInfoSS2016/InfoVorStochInfoSS2016

**Sommersemester 2016, Blatt 9**
**Abgabetermin: 27.06.2016,** zu Beginn der Vorlesung
(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an)
Bitte nur maximal zu zweit abgeben!

**Aufgabe 33 (Approximation einer Funktion)** (2 + 2 Punkte)
Es seien $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion und $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Wir definieren $Z_n := \mathbb{1}_{\{Y_n < f(X_n)\}}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ folgendes gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i - \int_0^1 f(x)dx\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

(b) Bestimmen Sie eine Zahl $n_0$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i - \int_0^1 f(x)\,dx\right| \leq 0.01\right) \geq 0.95.$$

**Aufgabe 34 (Emailverteiler)** (1 + 2 Punkte)
Sie verwalten einen Email-Newsletter, der von 200 Personen abonniert ist. Jede Person liest (unabhängig von den anderen Personen in dem Verteiler) einen Newsletter mit Wahrscheinlichkeit 0.4. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit lesen mehr als 80 Personen Ihre Emails?

(b) Wie viele Personen (möglichst wenige!) sollten auf dem Emailverteiler sein, damit mindestens 80 Personen Ihre Mails mit Wahrscheinlichkeit mehr als 90% lesen?

**Aufgabe 35 (Bedingte Unabhängigkeit)** (2 + 4 Punkte)
Diskrete Zufallsvariablen $X, Z$ heißen unabhängig gegeben $Y$, wenn

$$\mathbf{P}[X = k, Z = l|Y] = \mathbf{P}[X = k|Y] \cdot \mathbf{P}[Z = l|Y]$$

für alle möglichen Werte $k, l$. Eine entsprechende Definition gelte im stetigen Fall.

(a) Es seien $X_1, X_2, X_3$ unabhängige $p$-Münzwürfe. Sind $X_1, X_2$ auch unabhängig gegeben $X_1 + X_2$? Ist $X_1$ unabhängig von $X_1 + X_2 + X_3$ gegeben $X_1 + X_2$?

(b) Es seien $U, V, W$ unabhängig und uniform auf $[0, 1]$ verteilt. Sei $X$ die kleinste der Zufallsvariablen $(U, V, W)$, $Y$ die mittlere der drei und $Z$ die größte der Zufallsvariablen. Sind nun $X$ und $Z$ unabhängig gegeben $Y$?

**Aufgabe 36 (Bitübertragung)** (2 + 1 Punkte)

Die Übertragung eines Bits kann durch folgende Ereignisse beschrieben werden:

$$S_0 := \{\text{"0" gesendet}\}, \quad E_0 := \{\text{"0" empfangen}\}$$
$$S_1 := \{\text{"1" gesendet}\}, \quad E_1 := \{\text{"1" empfangen}\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Übertragungsfehler beträgt 1%. Es wird ein zufälliges Bit gesendet, dessen Wert mit Wahrscheinlichkeit $p$ gleich 1 ist:

$$\mathbf{P}[S_1] =: p, \quad \mathbf{P}[S_0] = 1 - p.$$

(a) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}[S_0|E_0]$ und $\mathbf{P}[S_1|E_1]$.

(b) Für welche $p \in [0, 1]$ gilt $\mathbf{P}[S_1|E_1] > 1/2$?