Übungen zur Vorlesung
„Stochastik für Studierende der Informatik“

http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochInfoSS2016/InfoVorStochInfoSS2016

Sommersemester 2016, Blatt 7
Abgabetermin: 13.06.2016, zu Beginn der Vorlesung
(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an)
Bitte nur maximal zu zweit abgeben!

Aufgabe 25 (Momenterzeugende der Normalverteilung) (5 Punkte)
Es sei X eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie für ein $t \in \mathbb{R}$ den Erwartungswert

$$\mathbf{E}[e^{tX}].$$

(Das Ergebnis können Sie zwar schon aus Theorem 3.24 ablesen, aber die Berechnung müssen Sie trotzdem noch machen.)
Zeigen Sie weiter, dass für $\mu = 0$ folgende Ungleichung gilt:

$$\mathbf{P}(X > \sigma) \leq \exp(-1/2).$$

Aufgabe 26 (Summe normalverteilter Zufallsvariablen) (5 Punkte)
Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit

$$\mathbf{E}[X_i] = \mu_i \qquad \text{und} \qquad \mathbf{Var}[X_i] = \sigma_i^2.$$

Weiter sei $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ das arithmetische Mittel der Summe dieser Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie, dass $X_1 + ... + X_n$ wieder normalverteilt ist und bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz.

(b) Es sei nun $\mu_i = \mu$ und $\sigma_i^2 = \sigma^2$ für alle $1 \leq i \leq n$. Bestimmen Sie die Verteilung von $(X_1, \bar{X})$.

(c) Gegeben sei die Situtation aus (b). Bestimmen Sie die Verteilung von $X_i - \bar{X}$ für ein beliebiges $i \in \{1, ..., n\}$.

Aufgabe 27 (Simulation diskreter Zufallszahlen) (2 Punkte)
Ihr Computerprogramm kann eine uniform auf $[0, 1]$-verteilte Zufallsvariable bestimmen. Geben Sie eine Vorschrift an, sodass Sie hieraus eine Poisson-verteilte Zufallszahl mit Parameter $\lambda > 0$ erhalten.

Aufgabe 28 (FindMax-Laufzeit Abschätzung) (4 Punkte)
Gegeben sei der FINDMAX-Algorithmus aus Aufgabe 8. Es sei $S_n(\sigma)$ die Anzahl an Umspeicherungen, die der Algorithmus bei Input $\sigma \in \mathcal{S}_n$ benötigt. Ferner gelten folgende Abschätzungen:

$$\mathbf{E}[S_n(\Sigma)] \leq 1 + \ln k \qquad \text{und} \qquad \mathbf{Var}[S_n(\Sigma)] \leq \ln k.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $c > 0$ gilt

$$\mathbf{P}(S_n(\Sigma) > 1 + c + \ln n) \leq \frac{\ln n}{c^2}.$$

(b) Es sein nun $n = 1000$. Bestimmen Sie die Anzahl an Umspeicherungen N, sodass

$$\mathbf{P}(S_n(\Sigma) > N) < 0.05$$

gilt.