Übungen zur Vorlesung
„Stochastik für Studierende der Informatik“

http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorStochInfoSS2016/InfoVorStochInfoSS2016

Sommersemester 2016, Blatt 11
Abgabetermin: 11.07.2016, zu Beginn der Vorlesung
(Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an)
Bitte nur maximal zu zweit abgeben!

Aufgabe 41 (ML-Schätzer - geometrische Verteilung) (2 + 2 Punkte)
Gegeben sei der Vektor $X = (X_1, ..., X_n)$ aus unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen, wobei $X_1 \sim \text{Geo}(p)$ ist. Die Zähldichte einer geometrisch verteilten Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ ist gegeben durch

$$\mathbf{P}(X_1 = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für p.

(b) Ist dieser unverzerrt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 42 (ML-Schätzer - Uniformverteilung) (2 + 2 Punkte)
Sei $(X = (X_1, ..., X_n), (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ ein statistisches Modell, so dass $X_1, ..., X_n$ unter allen $\mathbf{P}_\vartheta$ unabhängig und identisch nach $U[0, \vartheta]$ verteilt sind.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ.

(b) Ist dieser unverzerrt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 43 (Schätzer Normalverteilung) (2 + 2 Punkte)
Seien $n \in (0, \infty)$ und $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige $N(\frac{\vartheta}{2}, \vartheta^3)$-verteilte Zufallsvariablen. Betrachten Sie den durch

$$\widehat{\vartheta}_n = \frac{1}{n-1}\left(X_1 + \left(\sum_{i=2}^{n-1} 2X_i\right) + X_n\right)$$

definierten Schätzer für $\vartheta \in (0, \infty)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\widehat{\vartheta}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\vartheta \in (0, \infty)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\widehat{\vartheta}_n$ ein konsistenter Schätzer ist.

Aufgabe 44 (Konsistenz der empirischen Varianz) (4 Punkte)
Gegeben sei $(X = (X_1, ..., X_n), (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ ein statistisches Modell, sodass $X_1, ..., X_n$ unter allen $\mathbf{P}_\vartheta$ unabhängig und identisch verteilt sind. Weiter sei $\mathbf{E}[X_1^4] < \infty$ und $\sigma_\vartheta^2 := \mathbf{V}_\vartheta[X_1]$. Zeigen Sie, dass die empirische Varianz ein konsistenter Schätzer für σ_ϑ^2 ist.