Übungen zur Vorlesung
"Markovketten"

Sommersemester 2016, Blatt 3

`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/SS-2016/VorMarkovKetSS2016/InfoVorMarkovKetSS2016`

Abgabetermin: 30.05.2016 vor der Vorlesung
Bitte geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an und geben Sie zu zweit ab!

Aufgabe 5 (Konzentration auf absorbierenden Zuständen) (5 Punkte)

Es sei $X = (X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit höchstens abzählbarem Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Die Zustände $e_1, e_2 \in E$ seien absorbierend und für alle $e \in E$ gelte $e \to e_1$ oder $e \to e_2$.

a) Zeigen Sie, dass alle Zustände außer e_1 und e_2 transient sind.

b) Bestimmen Sie eine Familie $(\pi^\alpha = (\pi_i^\alpha)_{i\in E})_{\alpha\in[0,1]}$ von Wahrscheinlichkeitsvektoren auf E (d.h. $\sum_{i\in E} \pi_i^\alpha = 1$) mit der Eigenschaft $\pi^\alpha = \pi^\alpha P$ für alle $\alpha \in [0,1]$.

Aufgabe 6 ("Ausdünnung" einer Markovkette) (Übung)

Es sei $X = (X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit der Übergangsmatrix P. Ferner seien $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ positive, ganzzahlige unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die auch unabhängig von X sind. Setze $\tau_0 = 0$ sowie $\tau_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n$, $n \geq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\widetilde{X} = X_{\tau_n}$ eine Markovkette ist. Bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix $\widetilde{P}$.

(b) Seien i und j zwei kommunizierende Zustände bzgl. der Übergangsmatrix P und es gelte für den Träger $M = \{i \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\sigma_1 = i) > 0\}$ der Verteilung von σ_1, dass $\mathrm{ggT}\{M\} = 1$. Zeigen Sie, dass die Zustände ebenfalls bzgl. der Übergangsmatrix $\widetilde{P}$ kommunizieren.

Aufgabe 7 (Regenerationszyklen) (5 Punkte)

Es sei $X = (X_n : n \in \mathbb{N})$ eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum. Die Startverteilung sei gegeben durch δ_i, wobei i ein positiv rekurrenter Zustand sei. Wir definieren eine Folge von Rückkehrzeiten nach i durch

$$R_0 = 0 \quad \text{und} \quad R_{k+1} = \inf\{n > R_k : X_n = i\},\ k \geq 1.$$

Zeigen Sie:

a) $(R_k)_{k\geq 0}$ ist eine Folge von Stoppzeiten.

b) $(R_{k+1} - R_k)_{k\geq 0}$, ist eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen.

c) Die Teilstücke der Pfade

$$(X_{R_k}, \dots, X_{R_{k+1}-1})_{k\geq 0}$$

sind unabhängig und identisch verteilt.