Freiburger Mathematik-Tage

12.10.2018

“Markov-Ketten mit absorbierenden Zuständen”

Prof. Dr. H. R. Lerche

Universität Freiburg

Contents

Chapter 1

Einführende Beispiele

1.1 Die Kain und Abel-Aufgabe (nach A. Engel)

Abel schlägt seinem Bruder Kain folgendes Spiel vor. Sie werfen abwechselnd eine faire Münze, bis erstmals eine der Ziffern

a) 1111 oder

b) 0011 auftritt.

Kain gewinnt bei (a) und Abel bei (b). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Kain gewinnt? Ein möglicher Pfad im Verlauf des Spiels ist 01100101110011.
Wir stellen nun die Struktur der Aufgabe mit Hilfe eines Graphen dar, wobei die "Zustände" die möglichen Ergebnismuster sind und die Pfeile die möglichen Übergänge angeben. Alle Übergänge geschehen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

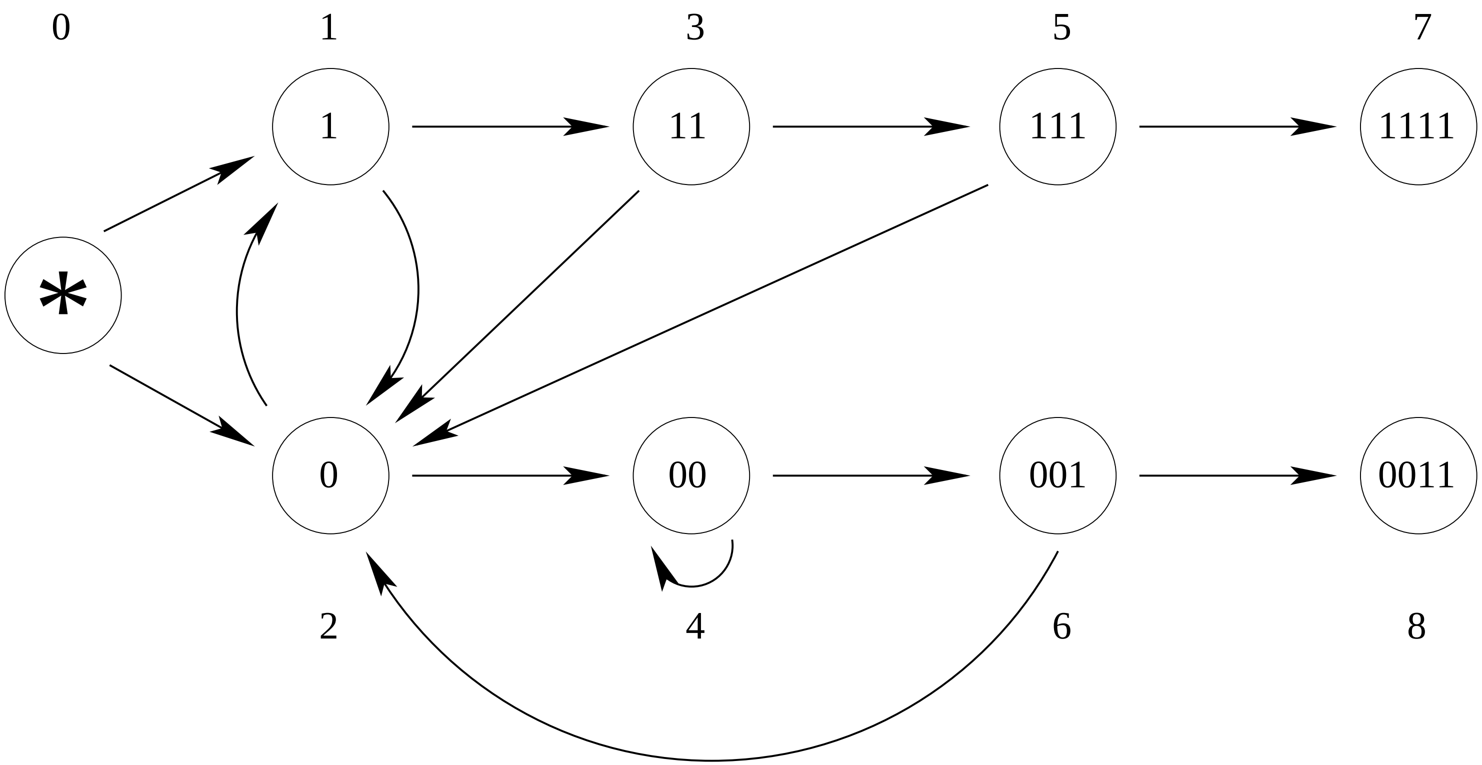


Abbildung 1.1: Der Graph der möglichen Übergänge

Die Zustände sind mit den Ziffern 0 bis 8 bezeichnet, wobei "0" den Zustand benennt, bei dem noch kein Ergebnis vorliegt. Der angegebene Spielverlauf 01100101110011 übersetzt sich nun (in eineindeutiger Zuordnung) in 21324621352468. Wie läßt sich nun die Aufgabe lösen? Wir bezeichnen mit p_i die Wahrscheinlichkeit bei Start im Zustand "i" den Zustand "7" zu erreichen bevor man den Zustand "8" erreicht hat. Dann gilt natürlich sofort $p_7 = 1$ und $p_8 = 0$. Außerdem sind die folgenden Gleichungen intuitiv plausibel.

$p_1 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3$

$p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_4$

$p_3 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_5$

$p_4 = \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2}p_6$

$p_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_2$

$p_6 = \frac{1}{2}p_2$.

Das Schema ist ein lineares Gleichungssystem mit sechs Unbekannten und Gleichungen. Durch Einsetzen erhält man sofort

$p_4 = p_6 = \frac{1}{2}p_2$

$p_1 = \frac{3}{2}p_2$

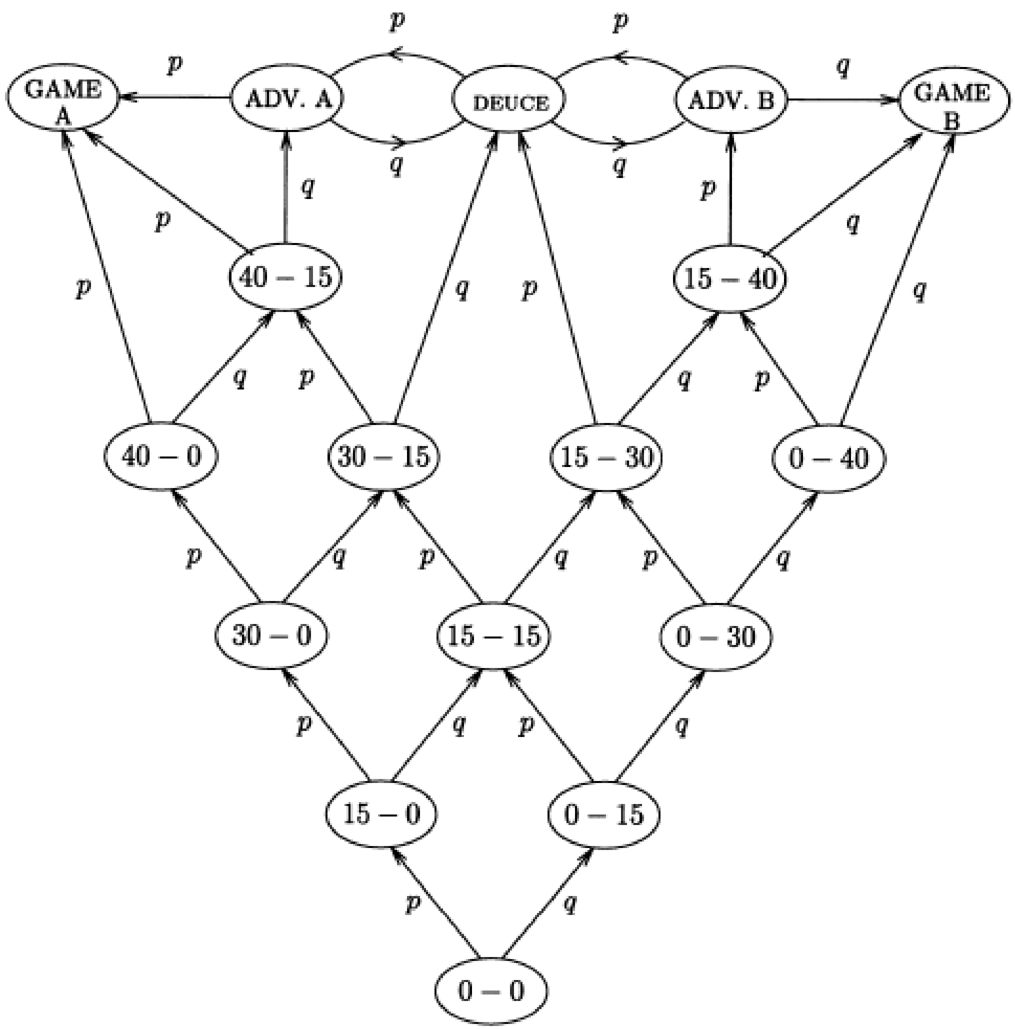
$p_3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}p_2$

und somit $\quad p_1 = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}p_2$.

Damit ist $p_1 = \frac{3}{10}$, $p_2 = \frac{1}{5}$ und folglich $p_0 = \frac{1}{4}$. Das heißt Kain gewinnt nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.
Das obige Gleichungssystem haben wir einfach intuitiv gewonnen. Können wir es auch streng herleiten (beweisen)? Dazu müssen wir etwas Wahrscheinlichkeitstheorie lernen und insbesondere etwas über Markov-Ketten erfahren. Zunächst ein kleiner Kurs zu Wahrscheinlichkeiten.

1.2 Tennis

Läßt man tie-breaks außer Acht kann ein Spiel (um einen Punkt) im Tennis als Markov-Kette modelliert werden. Dabei ist p die Wahrscheinlichkeit, dass der Aufschlagende A gewinnt. $q = 1 - p$ die Gewinnwahrscheinlichkeit vom Retournierenden B. Der folgende Graph beschreibt die Markov-Kette.



a

Abbildung 1.2: Der Graph für Tennis

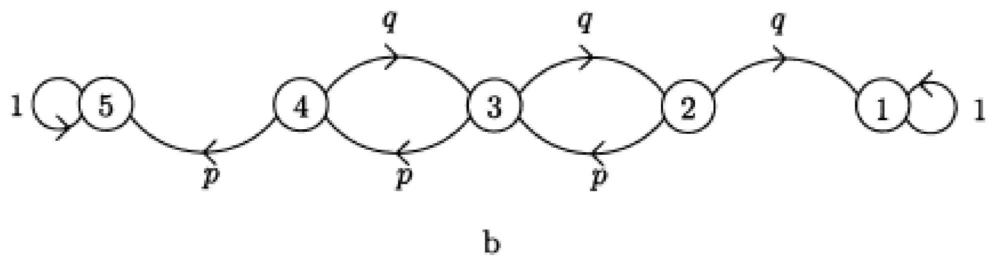


Abbildung 1.3: Der Graph für Tennis

Sei b_i die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B gewinnt, wenn das Spiel im oberen Zustand i weitergeht. Es ist

$b_1 = 1$, $b_5 = 0$ und

$b_2 = q + pb_3$

$b_3 = qb_2 + pb_4$

$b_4 = qb_3$

Es ergibt sich

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = \left(1, q\frac{1-pq}{1-2pq}, \frac{q^2}{1-2pq}, \frac{q^3}{1-2pq}, 0\right)$$

Bei Start vom Zustand $0-0$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass B gewinnt gleich $\sum_{i=1}^{5} p(i)b_i$. Dabei ist $p(i)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der erste obere erreichte Zustand i ist. Man rechnet leicht nach, dass gilt:

$$p(1) = q^4 + q^3pq + q^2pq^2 + qpq^3 + pq^4 = q^4(1+4p).$$

Ähnliche Rechnungen ergeben

$$p(2) = 4q^3p^2,\ p(3) = 6p^2q^2,\ p(4) = 4p^3q^2,\ p(5) = p^4(1+4q).$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass B gewinnt ist dann

$$\sum_{i=1}^{5} p(i)b_i = \frac{q^4(1+2p)(1+4p^2)}{1-2pq}.$$

Chapter 2

Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

2.1 Der Würfel

Ein Würfel werde einmal geworfen:

Die Menge der möglichen Ergebnisse ist $\Omega_1 = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Ist der Würfel fair, hat man: $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $1 \leq i \leq 6$. Folglich ergibt sich weiter

$$P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

und ebenso $P(\{1,3,5\}) = \frac{1}{2}$ sowie $P(\Omega_1) = 1$. Ist $A \subset \Omega_1$, so definiert man

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega_1|}.$$

Dabei ist $|A|$ die Anzahl der Elemente der Menge A.

Nun einige Beispiele zu möglichen Ereignissen.

Beispiele:

1. Ergebnis ist ungerade $\Rightarrow \{1,3,5\}$.

2. Ergebnis ist gerade und kleiner als 4 $\Rightarrow \{2,4,6\} \cap \{1,2,3\} = \{2\}$.

Grundlegende Bemerkung
Ereignisse, die durch eine logische Aussage bestimmt werden, beschreiben wir stets durch die Menge der Objekte, die die logische Aussage erfüllen.

Ein Würfel werde zweimal geworfen:

Ein Ergebnis ist z.B. $(1,3)$. Beim 1. Wurf kommt eine 1, beim 2. Wurf kommt eine 3. Hier ist die Menge der möglichen Ereignisse

$$\Omega_2 = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\} = \{(i,j)|1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}, \quad |\Omega_2| = 36.$$

Für $A \subset \Omega_2$ definiert man $P(A) := \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

Beispiel: Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe zweier Würfe ≤ 10 ist.

$$\begin{aligned} P(\text{Summe} \leq 10) &= 1 - P(\text{Summe} > 10) \\ &= 1 - P(\text{Summe} \geq 11) \\ &= 1 - P(B_{10}^c) = 1 - \frac{|B_{10}^c|}{|\Omega_2|} = 1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Dabei sind $B_{10} = \{(1,1),\dots,(4,6)\}$ und $B_{10}^c = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}$.

2.2 Mengentheoretische Beschreibung von Ereignissen

Ein Ereignis wird durch eine logische Aussage festgelegt. Dazu gehört genau eine Menge $A \subset \Omega$. Wir identifizieren von nun an Ereignisse mit Teilmengen von Ω, nämlich genau mit den Mengen, deren Elemente die logische Aussage erfüllen. Das heißt, was eintritt bzw. nicht eintritt, beschreiben wir durch Mengen.

Bezeichnungsweisen

Grundraum Ω:	sicheres Ereignis
Leere Menge $\emptyset$:	unmögliches Ereignis
$A \subset B$:	A liegt in B; aus A folgt B
$B \setminus A$:	B ohne A; $\omega \in B \setminus A$ genau dann wenn $\omega \in B$ und $\omega \notin A$
A^c:	Komplement von A, Gegenereignis; $\omega \in A^c$ genau dann wenn $\omega \notin A$
$A \cap B$:	A und B; $\omega \in A \cap B$ genau dann wenn $\omega \in A$ und $\omega \in B$
$A \cup B$:	A oder B; $\omega \in A \cup B$ genau dann wenn $\omega \in A$ oder $\omega \in B$
	(läßt $\omega \in A \cap B$ zu!)
$\mathcal{P}(\Omega)$:	Potenzmenge von Ω

Wichtige Rechenregeln:

Kommutativgesetze:	$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetze:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivgesetze:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Gesetze von de Morgan:	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Endliche Vereinigungen und Schnitte. Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse

$$\cup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{und} \quad \cap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_n$$

Sprechweise: Zwei Ereignisse A und B mit $A \cap B = \emptyset$ heißen disjunkt. Ist $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eine endliche Folge von Ereignissen mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so heißen diese Ereignisse paarweise disjunkt.

2.3 Wahrscheinlichkeiten

Definition 2.3.1 *Sei $A \in \Omega$ und seien $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Omega$. $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ heißt Partition von A, falls $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt.*

Definition 2.3.2 *Eine **Wahrscheinlichkeit** P, ist eine Abbbildung:*
$P : A \mapsto P(A)$ für $A \subset \Omega$ mit

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$, *falls $\{A_1, \ldots, A_n\}$ Partition von A ist.*

Definition 2.3.3 *Das Paar (Ω, P) heißt Wahrscheinlichkeitsraum, falls P eine Wahrscheinlichkeit über Ω ist.*

Rechenregeln:

i) $P(\emptyset) = 0$.

   Begründung: $A_i = \emptyset$ für $i \geq 1$ ist paarweise disjunkte Folge. Damit $P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots$.

ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ falls A und B disjunkt sind.

   Begründung: $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$. Damit ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + 0 + 0 + \ldots = P(A) + P(B)$.

iii) $P(A^c) = 1 - P(A)$.

   Begründung: folgt aus ii) mit $\Omega = A \cup A^c$.

iv) Ist $A \subset B$, so gilt $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

   Begründung: folgt aus ii) mit $B = A \cup (B \setminus A)$ und $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

v) Ist $A \subset B$, so gilt $P(A) \leq P(B)$.

vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

   Begründung: $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$.

2.4 Das Münzwurfmodell

Modelliert wird das wiederholte Werfen einer Münze. Dabei wird aber auch zugelassen, daß "Zahl" und "Wappen" **nicht** gleichwahrscheinlich sind. Zunächst treffen wir die Zuordnung: Zahl $\leftrightarrow 1$
Wappen $\leftrightarrow 0$.

Dann ist $\Omega = \{0, 1\}$ und wir setzen

$$\begin{aligned} P(1) &= p \\ P(0) &= 1 - p \qquad \text{mit } 0 \leq p \leq 1. \end{aligned}$$

Wir nennen diese Situation "p-Münze". Ist $p = \frac{1}{2}$, so sprechen wir von fairem Münzwurf. Wieso ist die Annahme $p \neq 1 - p$ und damit $p \neq \frac{1}{2}$ sinnvoll? Das Modell steht oft auch für beliebige Experimente mit zwei Ausgängen. Hier sind zwei Situationen.

a) **Würfelwurf**
Wir setzen "1" falls Würfelergebnis "6" ist und "0" falls Würfelergebnis "keine 6" ist. Dann ist $P(1) = \frac{1}{6}$ und $P(0) = \frac{5}{6}$.

b) **Parteienumfrage**
Wir setzen "1" falls "Ja zur CDU" und "0" falls "Nein zur CDU". Dann ist Ws(1)= 0,42 und Ws(0)=0,58.

Beispiel 1: Dreimaliges Werfen einer fairen Münze. Dann ist

$$\Omega = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$$

Offensichtlich ist $|\Omega| = 2^3 = 8$ und alle möglichen Ausgänge sind gleichwahrscheinlich. Sei A das Ereignis *mindestens einmal Wappen und mindestens einmal Zahl*. Dann ist

$$A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}.$$

Wir haben $|A| = 6$ und somit $P(A) = 6/8 = 3/4$. Man kann natürlich auch über das Gegenereignis *kein mal Wappen oder kein mal Zahl* argumentieren und erhält

$$A^c = \{(0,0,0), (1,1,1)\} \qquad \text{mit } P(A^c) = 2/8 = 1/4.$$

Beispiel 2: Eine p-Münze werde 5 mal geworfen. Was ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftretten von $(1, 1, 0, 0, 1)$

$$P((1, 1, 0, 0, 1)) = P(1)P(1)P(0)P(0)P(1) = p^3(1-p)^2.$$

Nun zur allgemeinen Situation von n Würfen einer p-Münze.

$$\Omega_n = \{(e_1, \dots, e_n) \mid e_i = 0 \text{ oder } e_i = 1 \ (1 \le i \le n)\}$$

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ sei eine bestimmte 0-1 Folge der Länge n (so wie ober (1,1,0,0,1))

$$P((\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)) = p^k(1-p)^{n-k},$$

wobei $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ ist. k ist damit die Anzahl der "1" in der Folge $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$.

Frage: Was ist die Wahrscheinlichkeit in n Würfen k mal "1" zu werfen mit einer p-Münze?

$$P(k \text{ Einsen in } n \text{ Würfen}) = P(\{(e_1, \dots, e_n) \in \Omega_w \mid \sum_{i=1}^{n} e_i = k\}) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}.$$

Dabei ist $\binom{n}{k}$ der k-te Binomialkoeffizient in der n-ten Reihe. Es gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{für } 0 \le k \le n$$

mit $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ und $0! = 1$. Außerdem ist

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = 1.$$

2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

Einführendes Beispiel: Eine faire Münze wird dreimal hintereinander geworfen. Dabei entspreche 1 dem Ausgang Zahl und 0 dem Ausgang Wappen in einem einzelnen Wurf. Also $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$. Sei A das Ereignis *mindestens zweimal Zahl*:

$$A = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}.$$

Für die faire Münze sind alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich. Damit ist

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Angenommen wir wissen bereits, daß der erste Wurf Zahl ergeben hat. Wie ändert sich unsere Einschätzung der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A? Wir wissen also, daß das Ereignis

$$B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$$

auf alle Fälle eintritt. Was ist die *bedingte* Wahrscheinlichkeit von A gegeben dieses Wissen? Die Intuition legt es nahe, alle Elemente aus B als gleichwahrscheinlich anzusehen und diese Menge als neuen Grundraum heranzuziehen. Damit erhalten wir als bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{3}{4} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Definition 2.5.1 *Seien A und B Ergeignisse und sei $P(B) > 0$. Dann ist*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

Aus der Definition folgt sofort (für $P(B) > 0$) die Multiplikationsregel

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Aus der Definition folgt ebenfalls

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B).$$

Es gilt nämlich $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ und $(A \cap B) \cap (A^c \cap B) = \emptyset$. Damit ist $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ und weiter

$$\frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B).$$

Sind A_1 und A_2 zwei disjunkte Ereignisse, so gilt

$$P((A_1 \cup A_2) \cap B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B).$$

Somit ist

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B). \end{aligned}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten verhalten sich also bezüglich des ersten Argumentes wie gewöhnliche Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel: Ein Gerät, das aus zwei Schaltkreisen I und II besteht, wird angeschaltet. Schaltkreis I fällt dabei mit Wahrscheinlichkeit 0.1 aus. Fällt Schaltkreis I aus, so fällt Schaltkreis II mit Wahrscheinlichkeit 0.2 ebenfalls aus. Bleibt Schaltkreis I intakt, so fällt Schaltkreis II mit Wahrscheinlichkeit 0.05 aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen beide Schaltkreise aus? Sei

$A = \{\text{Schaltkreis I fällt aus}\}$

$B = \{\text{Schaltkreis II fällt aus}\}$

Aus den obigen Angaben erhalten wir

$P(A) = 0.1$, $P(B|A) = 0.2$ und $P(B|A^c) = 0.05$

Damit folgt $P(A \cap B) = 0.1 \times 0.2 = 0.02$.

Können wir auch $P(A|B)$ berechnen? Dazu benötigen wir $P(B)$:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \\ &= P(B|A)P(A) + P(B|A^c)(1 - P(A)) \\ &= 0.02 \times 0.1 + 0.05 \times 0.9 = 0.065. \end{aligned}$$

Es folgt

$$P(A|B) = \frac{0.02}{0.065} = 0.308.$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

Sei $\{A_1, \dots A_n\}$ eine Partition von Ω. Sei B ein weiteres Ereignis. Dann gilt:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$

Begründung:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap \Omega) = P(B \cap (\cup_{i=1}^n A_i)) \\ &= P(\cup_{i=1}^n (B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i). \end{aligned}$$

Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen

Von einem gut gemischten Skat-Blatt (bestehend aus 32 Karten) werden vom Stapel nacheinander zwei Karten gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zweite Karte "Kreuz oder Pik", d.h. "schwarz" ist? Vermutung: Sie ist gleich $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} &P(\text{2. Karte "schwarz"}) \\ &\quad = P(\text{2. Karte "schwarz"} \mid \text{1. Karte "schwarz"}) \cdot P(\text{1. Karte "schwarz"}) \\ &\qquad + P(\text{2. Karte "schwarz"} \mid \text{1. Karte "rot"}) \cdot P(\text{1. Karte "rot"}) \\ &\quad = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{31} + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{31} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15+16}{31} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Eine direkte Folgerung aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ist die Bayessche Formel. Sie ist von grundlegender Bedeutung und beschreibt, wie neues Wissen zu verwerten ist. Sie wird deswegen auch oft als Lernformel bezeichnet.

Bayessche Formel:

$\{A_1, \ldots A_n\}$ sei eine Partition von Ω. Sei B ein weiteres Ereignis. Dann gilt:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Denn:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{m} P(B \mid A_j)P(A_j)}$$

Dabei wurde in der letzten Gleichung der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit verwendet.

Beispiel: Zuverlässigkeit von Prüfverfahren. Ein bestimmter Schaltkreis wird in Massenproduktion hergestellt. Dabei wird jeder Schaltkreis vor Auslieferung getestet. Die Produktion hat eine Ausschußrate von 0.01; daß heißt ein einzelner Schaltkreis ist mit Wahrscheinlichkeit 0.01 defekt. Das Prüfverfahren besitzt folgende Eigenschaften:

- bei einem fehlerfreien Schaltkreis zeigt das Prüfverfahren mit Wahrscheinlichkeit 0.1 fälschlich einen Fehler an.
- bei einem fehlerbehafteten Schaltkreis zeigt das Prüfverfahren mit Wahrscheinlichkeit 0.05 fälschlich keinen Fehler an.

Schaltkreise bei denen das Prüfverfahren einen Fehler anzeigt werden aussortiert und die verbleibenden Schaltkreise werden ausgeliefert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein ausgelieferte Schaltkreis auch wirklich fehlerfrei? Sei

$A = \{\text{Schaltkreis ist fehlerfrei}\}$ und $B = \{\text{Prüfverfahren zeigt Fehler an}\}$.

Wir wissen $P(A) = 0.99$, $P(B|A) = 0.1$ und $P(B|A^c) = 0.95$. Mit $A_1 = A$ und $A_2 = A^c$ liefert die Formel von Bayes

$$P(A|B^c) = \frac{P(B^c|A)P(A)}{P(B^c|A)P(A) + P(B^c|A^c)P(A^c)} = \frac{0.9 \times 0.99}{0.9 \times 0.99 + 0.05 \times 0.01} = 0.999.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein aussortierter Schaltkreis auch wirklich defekt ist ergibt sich mit analoger Rechnung als

$$P(A^c|B) = \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + 0.1 \times 0.99} = 0.0876.$$

Beispiel: Welche Urne (Box)?
3 Urnen mit weißen und schwarzen Kugeln seien gegeben:

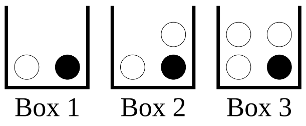


Abbildung 2.1: Urnen

Es wird eine Urne zufällig ausgewählt und dann eine Kugel daraus gezogen; die Kugel wird gezeigt, nicht aber die Urne. Man rate, aus welcher Urne gezogen wurde.

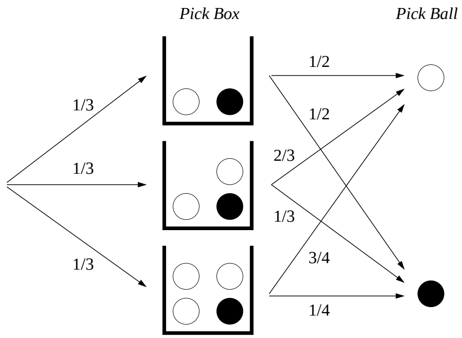


Abbildung 2.2: Wahrscheinlichkeiten

Bayes-Formel: $P(\text{Urne } i \mid \text{weiß}) = ?$

$$P(\text{Urne } i \text{ und weiß}) = P(\text{weiß} \mid \text{Urne } i)P(\text{Urne } i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{i}{i+1} \qquad P(\text{weiß}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{23}{36}$$

Dann folgt $\quad P(\text{Urne } 3 \mid \text{weiß}) = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{23}{36}} = \dfrac{\frac{3}{12}}{\frac{23}{36}} = \dfrac{9}{23}$

Weiter sind: $\quad P(\text{Urne } 2 \mid \text{weiß}) = \dfrac{8}{23} \qquad P(\text{Urne } 1 \mid \text{weiß}) = \dfrac{6}{23}.$

Definition 2.5.2 *Zwei Ereignisse A und B heißen (stochastisch) unabhängig, falls*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Sind A und B unabhängig und gilt $P(B) > 0$, so ist

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Sind A und B unabhängig und gilt $P(A) > 0$, so ist

$$P(B|A) = P(B).$$

Stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse bedeutet also, daß Kenntnis über das Eintreten des einen Ereignisses keine Information hinsichtlich des Eintretens des anderen Ereignisses liefert.

Sind A und B unabhängig, so sind auch A und B^c unabhängig. Es gilt dann nämlich

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

Betrachtet man mehr als zwei Ereignisse gleichzeitig, so muß man vorsichtig sein.

Definition 2.5.3 *Drei Ereignisse A, B und C heißen unabhängig, falls die folgenden vier Gleichungen gelten:*

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C). \end{aligned}$$

Gelten die ersten drei Gleichungen, so sind die Paare A und B, A und C und B und C jeweils unabhängig. Man spricht in diesem Fall von paarweiser Unabhängigkeit. Die dritte Gleichung stellt eine zusätzliche Forderung dar und folgt nicht aus den ersten drei Gleichungen.

Beispiel: Sei $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\}$ und

$$P(\{(0,0)\}) = P(\{(1,0)\}) = P(\{(0,1)\}) = P(\{(1,1)\}) = 1/4.$$

Dies entspricht also dem zweimaligen Werfen einer fairen Münze. Sei

$A = \{(0,1),(0,0)\}$ (Erster Wurf liefert Wappen)

$B = \{(0,1),(1,1)\}$ (Zweiter Wurf liefert Zahl)

$C = \{(0,0),(1,1)\}$ (Beide Würfe liefern dasselbe Ergebnis)

Dann gilt $|A| = |B| = |C| = 2$ und $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1$. Daraus folgt $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ und $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$. Außerdem ist $A \cap B \cap C = \emptyset$ und somit

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq 1/8 = P(A)P(B)P(C).$$

Eine Menge von n Ereignissen heißt (stochastisch) unabhängig, falls für jede Teilmenge der n Ereignissen gilt: die Wahrscheinlichkeit des Schnittereignisses ergibt sich als Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten. Für $n = 3$ sind dies vier Gleichungen; bei $n = 4$ ergeben sich bereits elf Gleichungen.

Es folgen nun einige Beispiele, die die Nützlichkeit des Begriffs der Unabhängigkeit verdeutlichen.

Beispiel: Funktion einer Maschine
Eine Maschine besteht aus zwei unabhängig voneinander arbeitenden Teilen. Wenn beide Teile fehlerhaft arbeiten oder wenn die Maschine falsch bedient wird, entsteht Ausschussware. Dabei sind Bedienungsfehler unabhängig von der Arbeitsweise der Maschine. Die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Teil fehlerhaft arbeitet, ist 0,05; beim zweiten Teil ist sie 0,08; die Wahrscheinlichkeit für einen Bedienungsfehler ist 0,02.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Ausschussware produziert?

$$\begin{aligned}
A &= \{1.\text{ Teil fehlerfrei}\} \qquad P(A) = 0,95\\
B &= \{2.\text{ Teil fehlerfrei}\} \qquad P(B) = 0.98\\
C &= \{\text{kein Bedienfehler}\} \qquad P(C) = 0.98
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\text{Defekt}) &= P(A^c \cap B^c \cap C) + P(C^c)\\
&= P((A^c \cap B^c))\,P(C) + P(C^c)\\
&= P(A^c)P(B^c)P(C) + P(C^c)\\
&= 0,05 \cdot 0,08 \cdot 0,98 + 0,02\\
&= 0,00392 + 0,02 = 0,02392\\
&\approx 2,4\%
\end{aligned}$$

Beispiel: Wahrscheinlichkeit, daß im k-ten Wurf erstmals eine “6” gewürfelt wird.

Erstmals im k-ten Wurf eine “6” zu werfen, bedeutet, in den vorangegangenen $k-1$ Würfen keine “6” , dann aber eine “6” zu werfen. Folglich ist

$$P(\text{erstmals “6” im } k\text{-ten Wurf}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} =: p_k, \quad k \geq 1$$

Es muß natürlich $\sum\limits_{k\geq 1} p_k = 1$ gelten, was man leicht mit Hilfe der geometrische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = 6$ einsieht.

2.6 Zufallsgrößen

Eine Zufallsgröße liefert einen Zahlenwert als Ergebnis eines Zufallsexperimentes.

Definition 2.6.1 *Sei Ω ein Grundraum mit einer Wahrscheinlichkeit P. Eine Abbildung X*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

*heißt **Zufallsgröße**.*

*Sei X eine Zufallsgröße mit endlichem (oder abzählbarem) Wertebereich $\{x_1, x_2, \ldots x_k\}$. Die **Verteilung** von X wird durch die Punktwahrscheinlichkeiten p_i mit*

$$p_i = P(X = x_i) = P(\{\omega | X(\omega) = x_i\})$$

beschrieben.

Bemerkung: Es gilt $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Beispiel: Dreimaliges Werfen einer fairen Münze. Wieder stehe 1 für Zahl und 0 für Wappen. Also $\Omega = \{0,1\}^3$. Sei für $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$

$$X(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3.$$

Der Wertebereich von X ist $\{0,1,2,3\}$. So ist etwa $X((0,0,0)) = 0$ und $X((0,1,1)) = 2$. X zählt die Anzahl der Würfe mit Ergebnis Zahl. Es gilt

$$P(X = 0) = 1/8\ ,\ P(X = 1) = 3/8\ ,\ P(X = 2) = 3/8\ ,\ P(X = 3) = 1/8$$

Definition 2.6.2 *Ist X eine Zufallsgröße mit Werten $x_1, x_2, \ldots x_k$, so heißt*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i)$$

***Erwartungswert von** X.*

Beispiele 1: Einmaliges Werfen eines Würfels. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Sei $X(i) = i$ für $i = 1, \ldots, 6$. Dann ist $P(X = i) = 1/6$ und $E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + \ldots + 6) = \frac{3 \cdot 7}{6} = 3,5$.

Beispiele 2: Einmaliges Werfen einer p-Münze $\Omega = \{0, 1\}$. Sei $X(0) = 0$ und $X(1) = 1$. Dann ist

$$E(X) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = P(X = 1) = p.$$

2.7 Gesetz der Großen Zahlen

Definition 2.7.1 *Die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit dem diskreten Wertebereich $X(\Omega) = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ heißen unabhängig, falls für alle Werte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ aus $X(\Omega)$ gilt*

$$P(X_1 = z_1, \ldots, X_n = z_n) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j = z_j)$$

Beispiel: Sei $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0, 1\}\}$, $X_i(\omega) = \omega_i$ und

$$P(\{\omega \mid X_i(\omega) = 1\}) = p, \quad P(\{\omega \mid X_i(\omega) = 0\}) = 1 - p.$$

Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig, so folgt mit $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, \ldots, n$

$$P(X_i = \varepsilon_i, i = 1, \ldots, n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = \varepsilon_i) = p^{\sum \varepsilon_i}(1 - p)^{\sum(1-\varepsilon_i)} = p^k(1 - p)^{n-k},$$

falls $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = k$ ist. Dann ist $X = X_1 + \ldots + X_n$ binomialverteilt mit Parametern n und p.

Das Gesetz der Großen Zahlen (ohne Beweis):

Sei $n \in \mathbb{N}$. Seinen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsgrößen mit derselben Verteilung und endlichem Erwartungswert $E(X_1)$ und endlicher Varianz $\mathrm{Var}(X_1)$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_1)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Bemerkungen:

1. Sind die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Bernoulli-verteilt mit Parameter p, so gilt $E(X_1) = p$ und man hat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = p.$$

2. Speziell beim Würfeln setze man

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } Y_i = 6 \\ 0 & \text{falls } Y_i \neq 6 \end{cases}$$

wenn Y_i das Ergebnis des i-ten Wurfes bedeutet. Dann ist $p = 1/6$ und man hat

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \frac{1}{6};$$

in Worten: Die relative Häufigkeit der Sechsen in n Würfen konvergiert für $n \to \infty$ gegen $1/6$.

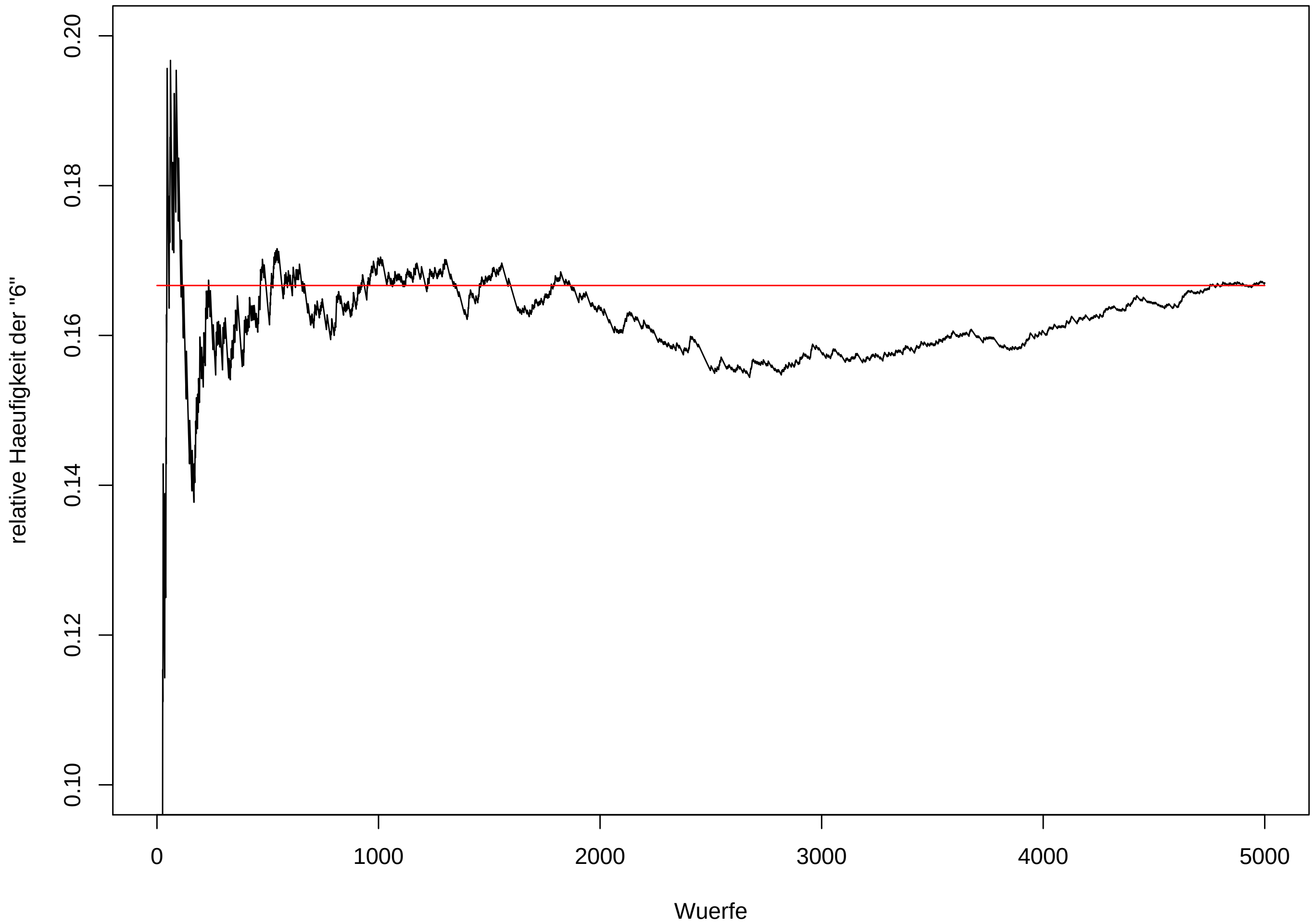


Abbildung 2.3: relative Häufigkeit

Chapter 3

Markov-Ketten

3.1 Definitionen

Definition einer Markov-Kette

(Ω, P) sei Wahrscheinlichkeitsraum, E sei endliche Menge. Seien $X_i : \Omega \to E, i = 0, 1, 2, 3, ...$ Zufallsgrößen. Die Menge der Zufallsgrößen $\mathcal{X} = \{X_0, X_1, X_2, ..., X_n, ...\}$ heißt Markov-Kette (der Länge n), falls

$$P(X_i = x_i \mid X_0 = x_0, ..., X_{i-1} = x_{i-1}) = P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1})$$

für $i = 1, 2, ..., n, ...$ gilt.

Eine Markov-Kette $\mathcal{X}$ heißt stationär, falls

$$P(X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}) = P(X_1 = x_i \mid X_0 = x_{i-1})$$

für $i = 1, 2, ...$ gilt.

Bezeichnungsweisen

1. E heißt Zustandsraum,
2. $q(x,y), x,y \in E$ heißt stochastische Matrix, falls $q(x,y) \geq 0$ und $\sum_{y \in E} q(x,y) = 1, \forall\, x \in E$ gilt.
3. $\pi(x_0) = P(X_0 = x_0)$ heißt Startverteilung.

Konstruktion von stationären Markov-Ketten

Gegeben:

1. E endlich,
2. $q(x,y), x,y \in E$ stochastische Matrix,
3. $\pi(x), x \in E$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf E, d.h. $\pi(x) \geq 0$ für alle $x \in E$ und $\sum_{x \in E} \pi(x) = 1$.

Zur Existenz:

Sei $\Omega_{n+1} := \{\omega = (x_0, ..., x_n) \mid x_i \in E, i = 0, ..., n\}$ und $X_i(\omega) := x_i, i = 0, 1, ..., n$.

Satz 3.1.1 *Sei $n \in \mathbb{N}$.*
Durch $p(\omega) := \pi(x_0) q(x_0, x_1) ... q(x_{n-1}, x_n)$ wird eine WS-Funktion auf Ω_{n+1} gegeben, so dass gilt:

1. $P(X_0 = x_0) = \pi(x_0)$

2. $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = p(\omega)$

3. $P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_0 = x_0, ..., X_i = x_i) = q(x_i, x_{i+1}) = P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_i = x_i)$
für $i = 0, ..., n-1$

Beweis:

Zu (2): Sei $\omega = (x_0, ..., x_n)$.
Mit $p(\omega) = \pi(x_0)p(x_0, x_1)...p(x_{x-1}, x_n)$ gilt: $p(\omega) \geq 0$ und $\sum\limits_{\omega \in \Omega_{n+1}} p(\omega) = 1$. Da $X_i(\omega) = x_i$ ist, folgt $P(\{\omega | X(\omega) = x_i, i = 0, ..., n\}) = P(\{\omega\}) = p(\omega)$.

Zu (1):

$$
\begin{aligned}
(+)\ P(\{X_0 = x_0, ..., X_i = x_i\}) &= \sum_{x_{i+1},...,x_n} \pi(x_0)q(x_0, x_1)q(x_{i-1}, x_i)...q(x_{n-1}, x_n) \\
&= \pi(x_0)q(x_0, x_1)...q(x_{i-1}, x_i)
\end{aligned}
$$

für $i = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Zu (3):

$$
\begin{aligned}
P(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_i = x_i) &= \frac{\pi(x_0)q(x_0, x_1)...q(x_{i-1}, x_i), q(x_i, x_{i+1})}{\pi(x_0)q(x_0, x_1)...q(x_{i-1}, x_i)} \\
&= q(x_i, x_{i+1}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_i = x_i) &= \frac{P(X_{i+1} = x_{i+1}, X_i = x_i)}{P(X_i = x_i)} \\
&= \frac{\sum\limits_{x_0,...,x_i-1} \pi(x_0)q(x_0, x_1) \dots q(x_{i-1}, x_i)q(x_i, x_{i+1})}{\sum\limits_{x_0,...,x_i-1} \pi(x_0)q(x_0, x_1) \dots q(x_{i-1}, x_i)} \\
&= q(x_i, x_{i+1})
\end{aligned}
$$

$\square$

Bemerkung 1 $P(X_i = x_i) = \sum\limits_{x_0,\ldots,x_{i-1}} \pi(x_0)q(x_0,x_1)\ldots q(x_{i-1},x_i) = \sum\limits_{x_0} \pi(x_0)q^i(x_0,x_i)$.
Dabei ist $q^{n+1}(x,y) = \sum\limits_{z\in E} q^n(x,z)\,q(z,y)$.

Bemerkung 2 *Mit Satz 1 ist eine Markov-Kette der Länge n konstruiert!*

Bemerkung 3 *Wegen (+) im Beweis von Satz 1 ist die Markov-Kette der Länge i eingebettet in eine Markov-Kette der Länge n.*

Bemerkung 4 *Mit dieser Bedingung lässt sich eine Markov-Kette beliebiger Länge konstruieren. Dies darzustellen sprengt aber diesen Rahmen.*

Beispiele für Markov-Ketten

1) Kain und Abel-Aufgabe

$$(q(x,y))_{x,y\in E} = \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac12 & 0 & \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $E = \{1,2,3\}$

$$q(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac34 & \frac14 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad q^2(x,y) = \begin{pmatrix} \frac58 & 0 & \frac38 \\ \frac12 & \frac38 & \frac18 \\ 0 & \frac34 & \frac14 \end{pmatrix}$$

$q^n(x,y) \to \alpha(y)$ mit $\alpha(1) = \frac{8}{19}, \alpha(2) = \frac{6}{19}, \alpha(3) = \frac{5}{19}$.

3) Sei $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängig, $X_i = \sum\limits_{j=1}^{i} Y_j,\ X_0 = x_0$. Dann ist $\{X_0, X_1, X_2, \ldots,\}$ eine Markov-Kette.

Beweis: Sei $m < n$, $P(X_{m+1} = x \mid X_0 = x_0, \ldots, X_m = x_m)$, $Y_i = X_i - X_{i-1}, i = 1, \ldots, n, Y_0 = X_0$.

$$\begin{aligned} &P(X_{m+1} = x \mid X_0 = y_0, X_1 = y_0 + y_1, X_2 = y_0 + y_1 + y_2, \ldots, X_m = y_0 + \ldots + y_m) \\ &\quad = P(Y_{m+1} = x - (y_0 + y_1 + \ldots + y_m) \mid X_m = y_0 + \ldots + y_m) \\ &\quad = P(X_{m+1} = x \mid X_m = x_m) \end{aligned}$$

□

4) **Ehrenfestsches Urnenmodell**

N Teilchen befinden sich in den Behältern 1 und 2.
i Teilchen seien in Behälter 1, $N - i$ Teilchen in Behälter 2.
In jeder Zeiteinheit springt ein Teilchen entweder von $1 \to 2$ oder von $2 \to 1$.

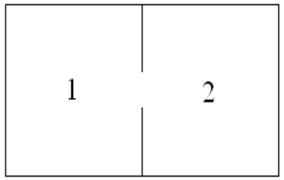


Abbildung 3.1: Ehrenfestsches Urnenmodell

$q(i, i+1) = \frac{N-i}{N}, q(i, i-1) = \frac{i}{N}$
$q(i, j) = 0$ für $j \neq i \pm 1$

3.2 Absorbierende Zustände

3.2.1 Absorptionswahrscheinlichkeiten

Dies ist eine Begründung für die Rechnung bei der Kain-Abel-Aufgabe.
$A \subset E$. Wir nehmen an, dass für jedes $x \in E$ die WS nach A zu kommen gleich 1 ist.
Bei der Kain & Abel-Aufgabe ist $A = \{7, 8\}$.
Sei $A = A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
$P_{A_1}(x)$ ist die WS bei Start in x beim ersten Eintritt nach A nach A_1 zu gelangen.

Satz 3.2.1 *a)* $P_{A_1}(x) = 1$ *für* $x \in A_1$ *und* $P_{A_1}(x) = 0$ *für* $x \in A_2$.

b) Für $x \notin A$ *ist* $P_{A_1}(x) = \sum_{z \in A_1} q(x,z) + \sum_{n \geq 2} \sum_{x_i \notin A \text{ für } i=1,\ldots,n-1, z \in A_1} q(x,x_1)q(x_1,x_2)q(x_{n-1},z)$.

c) Für $x \notin A$ *gilt* $P_{A_1}(x) = \sum_{y \in E} q(x,y)P_{A_1}(y)$.

Beweis: Zu (b): Sei $x \notin A$

$$\begin{aligned}
P_{A_1}(x) &= P(X_0 = x, X_1 \in A_1) + P(\bigcup_{n \geq 2}\{X_0 = x, X_i \notin A \text{ für } i < n,\ x_n \in A_1\}) \\
&= \sum_{z \in A_1} q(x,z) + \sum_{n \geq 2} P(\{X_0 = x, X_i \notin A \text{ für } i < n,\ x_n \in A_1\}) \\
&= \sum_{z \in A_1} q(x,z) + \sum_{n \geq 2} \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \notin A, x_n \in A_1} q(x,x_1)\ldots q(x_{n-1},x_n)
\end{aligned}$$

Zu (c):

$$
\begin{aligned}
P_{A_1}(x) &= P(X_0 = x, X_1 \in A_1) + P(X_0 = x, X_1 \notin A, X_2 \in A_1) \\
&\quad +P(X_0 = x, \exists\, k \geq 3,\ X_n \in A_1,\ X_i \notin A,\ i < n) \\
&= \sum_{y \in A_1} q(x,y) + \sum_{y \notin A, z \in A_1} q(x,y)q(y,z) \\
&\quad + \sum_{n \geq 3} \sum_{y \notin A} \sum_{x_i \notin A, i=2,\ldots,n-1, z \in A_1} q(x,y)q(y,x_2)\ldots q(x_{n-1},z) \\
&\overbrace{=}^{(*)} \sum_{y \in A} q(x,y)P_{A_1}(y) + \sum_{y \notin A} q(x,y)(\sum_{z \in A_1} p(y,z)) \\
&\quad + \sum_{y \in A} q(x,y)(\sum_{n \geq 3} \sum_{x_i \notin A, i=2,\ldots,n-1, z \in A_1} q(y,x_2)\ldots q(x_{n-1},z)) \\
&= \sum_{y \in A} q(x,y)P_{A_1}(y) + \sum_{y \notin A} q(x,y)P_{A_1}(y)
\end{aligned}
$$

(*) $P_{A_1} = 1$ für $x \in A_1$ und $P_{A_1} = 0$ für $x \in A - A_1$. $\square$

3.2.2 Berechnung von Ruin-Wahrscheinlichkeiten

$0 < x < b, x, b \in \mathbb{N}$

$Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige Zufallsgrößen mit $P(Y_1 = 1) = p = 1 - P(Y_1 = -1)$

$S_0 = x, S_n = x + \sum_{i=1}^{n} Y_i, n \geq 1$

S_n ist Markov-Kette

Interpretation: S_n ist Gesamtgewinn bei einem Münzwurfspiel.

Frage nach Ruin-Wahrscheinlichkeit:

$p(x) = P(S_0 = x, \exists\, n \text{ mit } S_n = 0 \text{ und } 0 < S_i < b \text{ für } i < n)$.

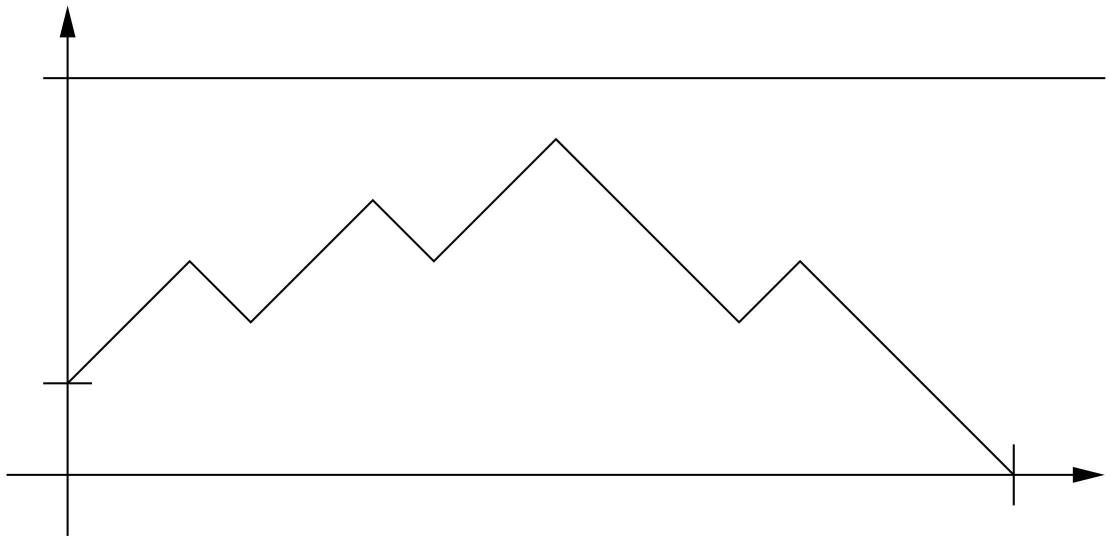


Abbildung 3.2: Ruin-Wahrscheinlichkeiten

Satz 3.2.2 *Für* $p = \dfrac{1}{2}$ *gilt* $p(x) = \dfrac{b-x}{b}$ *für* $0 \leq x \leq b$

Für $p \neq \dfrac{1}{2}$ *gilt* $p(x) = \dfrac{(\frac{q}{p})^b - (\frac{q}{p})^x}{(\frac{q}{p})^b - 1}$ *für* $0 \leq x \leq b$.

Beweis: Fall 1: $p = \frac{1}{2}$

Satz 1 liefert $p(x) = \frac{1}{2}p(x-1) + \frac{1}{2}p(x+1)$ für $0 < x < b$, $p(0) = 1, p(b) = 0$,

$p(x) = 1 - \frac{x}{b}$.

Fall 2: $p \neq \frac{1}{2}$

$p(x) = pp(x+1) + qp(x-1)$ für $0 < x < b, p(b) = 0, p(0) = 1$

$q = 1 - p$

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) = pp(x+1) + qp(x-1) \\ pp(x) + qp(x) &= pp(x+1) + qp(x-1) \\ p(x+1) - p(x) &= \frac{q}{p}(p(x) - p(x-1)) \\ &\text{Wiederholtes Anwenden liefert} \\ p(x+1) - p(x) &= (\frac{q}{p})^x (p(1) - p(0)) \end{aligned}$$

Sei $r := \frac{q}{p}$

Aufaddieren liefert $p(x) - p(0) = \frac{r^x - 1}{r-1}(p(1) - p(0))$

Wegen $p(0) = 1$: $p(x) = 1 + \frac{r^x-1}{r-1}[p(1) - 1)]$

Wegen $p(b) = 0$: $p(1) - 1 = -\frac{r-1}{r^b-1}$.

Einsetzen in vorangegangene Gleichung liefert die Behauptung. □

Anhang A

Historische Bemerkungen

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung geht in ihren Anfängen auf das Bestimmen von Chancen und Auszahlungen bei Spielen zurück; etwa um 1580 gibt es dazu erste Zeugnisse. Das Spielen aber ist so alt wie die Menschheit und der Zufall war wohl schon immer beim Spielen mit dabei. Im Altertum hat man sehr oft mit würfelähnlichen Gebilden gespielt, meist hergestellt aus Knochen von Tieren. Bei den Griechen und Römern hieß ein solcher "Würfel" Astragalus; er war aus Ziegenknochen gefertigt. Im Mittelalter kannte man schon die uns heute geläufigen Würfel und natürlich die dazugehörigen Spiele. Eines der frühsten Werke, das sich mit Chancen und Quoten beim Würfelspielen beschäftigt, geht zurück auf Cardano, 1584. Es heißt "Liber de Ludo Alea". Darin finden sich Überlegungen von der Art, daß, wenn ein Würfel nicht "gezinkt" ist, die Wette auf 1, 3, 5 als genauso günstig anzusehen ist, wie die auf 2, 4, 6. Cardano war auch einer der ersten, der Additions- und Multiplikationsgesetze für Wahrscheinlichkeiten formulierte. Später um 1650 berechneten Pascal und auch Huygens die Wahrscheinlichkeiten von Spielergebnissen. Um 1800 gab es bereits wahrscheinlichkeits-statistische Überlegungen in der Astronomie, z. B. bei der Bestimmung von Planetenorten durch Gauss. Im 19. Jahrhundert wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung noch zur Physik gezählt. Aber Hilberts Bemühungen die Gebiete der Mathematik solide zu begründen, führten dazu , daß Kolmogorov 1930 einen axiomatischen Zugang zur Wahrscheinlichkeitstheorie fand, der diese zu einem Teilgebiet der Mathematik machte. Wahrscheinlichkeiten und Statistiken begegnen uns heute an vielen Stellen des Alltags, sei es im Sport, in der Technik und Wissenschaft, in der Medizin, im Banken- und Versicherungswesen.

Wir wissen seit 80 Jahren, daß die Materie im Kleinen Wahrscheinlichkeitsgesetzen gehorcht. In der sogenannten Quantentheorie sind sie entwickelt und vielfach in der Technik und Wissenschaft überprüft worden.

Ich will diese historischen Bemerkungen schließen mit einem Beispiel, das die Brücke schlägt von Cardano zu den Ereignissen unserer Tage. Am 08.04.2005 sollte ursprünglich die Hochzeit zwischen Prinz Charles und Camilla Parker-Bowles stattfinden. Ende März 2005 stellten die Buchmacher in London die Wette auf eine Verschiebung der Hochzeit mit einer Quote 19:1, d.h. 19 Pfund Gewinn bei 1 Pfund Einsatz. Tatsächlich trat durch den Tod des Papstes das Ereignis ein und die Londoner Wettbüros durften kräftig zahlen.